Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Министерство науки и высшего образования Республики Бурятия
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Бурятский государственный университет им. Доржи Банзарова
Иркутский государственный университет
Монгольский государственный университет науки и технологий
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской академии наук

МАТЕМАТИКА, ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ (МПМО23)

Материалы VIII Международной конференции

26 июня – 1 июля 2023 г.

г. Улан-Удэ, Байкал

Улан-Удэ
Издательство ВСГУТУ
2023

УДК 51(063)
ББК 22.1я43
М34

Научный редактор *А.Д. Мижидон*

Ответственный редактор *В.Н. Ханхасаев*

М34 Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО23): Материалы VIII Международной конференции. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2023. – 269 с.

ISBN 978-5-907599-97-0

В сборнике представлены материалы VIII Международной конференции «Математика, ее приложения и математическое образование» (МПМО23) (г. Улан-Удэ, Байкал, 26 июня – 1 июля 2023 г.).

Материалы статей в сборнике представлены в авторской редакции.

ISBN 978-5-907599-97-0

ББК 22.1я43

© ВСГУТУ, 2023

The Ministry of Education and Science of the Russian Federation
The Ministry of Education and Science of the Republic of Buryatia
East Siberia State University of Technology and Management
Keldysh Institute of Applied Mathematics Russian Academy of Sciences
Buryat State University
Irkutsk State University
Mongolian University of Science and Technology
Federal Research Center "Computer Science and Management"
of the Russian Academy of Sciences

MATHEMATICS, ITS APPLICATIONS AND MATHEMATICAL EDUCATION (MAME23)

Proceedings of the VIII International Conference

June 26 – July 1, 2023

Ulan-Ude, Baikal

Ulan-Ude
Publishing Department of East Siberia State University
of Technology and Management
2023

УДК 51(063)
ББК 22.1я43
М34

Science editor *A.D. Mizhidon*

Managing editor *V.N.Khankhasaev*

М34 Mathematics, its applications and mathematical education (MAME23): Proceedings of the VIII International Conference. – Ulan-Ude: Publishing Department of East Siberia State University of Technology and Management, 2023. – 269 p.

ISBN 978-5-907599-97-0

The proceedings of the VIII International Conference “Mathematics, its applications and mathematical education” (Ulan-Ude, Baikal, June 26 – July 1, 2023) are presented.

ISBN 978-5-907599-97-0

ББК 22.1я43

© ВСГУТУ, 2023

Оглавление

Айда-Заде К.Р., Ашрафова Е.Р. Оптимизация параметров источников системы с нелокальными условиями 8
Антипин А.С., Хорошилова Е.В. Терминальное управление краевой задачей конического программирования 12
Антипина Е.Д., Солодуша С.В., Спиряев В.А. Идентификация интегральных моделей нелинейной динамики на зашумленных данных методом интегрирования произведения 15
Баргуев С.Г. Условие ортогональности для колебаний твердого тела с двумя степенями свободы на балке Эйлера-Бернулли 19
Бороева М.Н., Булатов М.В. О численном решении интегро-алгебраических уравнений, оба предела интегрирования которых переменные 23
Будникова О.С., Булатов М.В. О конструировании двухстадийных методов для численного решения интегро-алгебраических уравнений 26
Булатов М.В., О методах численного решения интегро-алгебраических уравнений 29
Булатов М.В., Соловарова Л.С. О разрешимости квазилинейных интегро-алгебраических уравнений 32
Булгатова Е.Н., Павлова Е.Н., Елтошкина Е.В. Оптимальное распределение узлов квадратурной формулы. 35
Булгытов Е.Б., Шаранхаев И.К. О некоторых классах мультифункций, порожденных максимальными мультиклонами 38
Бырдин В.М. О новых фундаментальных, замечательных свойствах голоморфных вещественных функций (от теории волн к комплексному анализу) 41
Бырдин В.М. Экспонента глобальной информации, инфо-хронологические совпадения и гипотеза неявной релятивной ведо'мости (провидения) земной цивилизации 44
Васильева Е.Г. Квадратурные формулы с переменным шагом интегрирования 49
Васильева Е.Г. Оценка снизу функционала погрешности квадратурных формул. 52
Галанова Н.Ю., Подкорытов М.В. О применении геометрической наглядности к абстрактным алгебраическим структурам на примере теории сечений упорядоченных полей 59
Д.Ганхуяг, Л.Баяр-Эрдэнэ, Г.Саруул. Некоторые оптимизационные модели, связанные с сейсмической обстановкой Монголии 62
Гармаев В.Д., Гармаева С.С., Чимитова В.В. Построение и анализ сетевой модели функционирования предприятия 65
Гражданцева Е.Ю. Решение задачи Коши для неоднородной линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка 69
Гредасова Н.В., Павленко В., Сесекин А.Н., Шуляева К.С. Об устойчивости по Хайерсу-Уламу - Рассиасу линейных дифференциальных уравнений с обобщенным воздействием в правой части и с запаздыванием 72
Гриншпон И.Э., Гриншпон Я.С. Пробелы в школьных знаниях и навыках у первокурсников: диагностика и способы решения 75
Долгий Ю.Ф. Каноническая аппроксимация задачи оптимальной импульсной стабилизации для автономной линейной системы с последействием 79
Думнов В.А., Булдаев А.С. Условия улучшения управления и методы оптимизации в дискретно-непрерывных системах 82
Дьякович М.П., Финогенко И.А. Динамика связанного со здоровьем качества жизни 87
Елисеев А.В., Кузнецов Н.К. Структурное математическое моделирование в оценке динамических состояний механических колебательных на основе рычажных представлений 90
Елтошкина Е.В., Павлова Е.Б. Метод структурных отклонений для решения задач статики проектируемых механизмов 93
Елтошкина Е.В., Павлова Е.Б. Методы организации самостоятельной работы студентов 97
Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. Высокопараллельная методика моделирования нестационарных газодинамических течений с учетом сопряженного теплообмена 100
Жигжитжапов Б.В., Кожанов А.И. Краевая задача для одного класса уравнений составного типа с вырождением 104
Захаренков Н.В., Захаренкова Т.Р. Проектирование схемы сервопривода прецизионного позиционирования с распределением каналов управления по ряду Фибоначчи 106

Индуцкая Т.С. О численном решении систем дифференциальных уравнений дробного порядка хессенберговой формы 109
Казьмин И.Д. Методы поиска особых экстремальных управлений на основе задач о неподвижной точке 112
Кандрина А.Д., Павленко В., Сесекин А.Н. Об устойчивости по Хайерсу-Уламу нелинейных дифференциальных уравнений с разрывными траекториями 115
Косов А.А., Семенов Э.И. О свойствах решений уравнений движения гиростата в одном специальном случае 118
А.В. Данеев, А.В. Лакеев, Ю.Э. Линке, В.А. Русанов. К разрешимости задачи реализации *APL*-регулятора дифференциальной адаптивной системы второго порядка 122
Маренко В.А., Мильчарек Т.П., Мильчарек Н.А., Ложников А.Е. Модели политического сознания индивида 126
Мегралиев Я.Т., Искендеров Р. А., Альгаева Ф.Р. Обратная краевая задача для линеаризованного уравнения продольных волн в стержнях с интегральным условием первого рода 129
Медведев С.Б., Семисалов Б.В. Алгоритм решения четырёхволнового кинетического уравнения в оптической турбулентности 138
Монгуш А.Б. Метод фрагментации и дефрагментации формальных контекстов 142
Намсараева Г.В. Об одной обратной задаче для уравнения Буссинеска 146
Ни М.К. Пространственные контрастные структуры для сингулярно возмущенных задач с разрывной правой частью 150
Осипов А.Л., Исаев Н.А. Математическое моделирование функции эффективности 153
Очирбат Баатарын, Балжинням Цангиагийн, Ганзориг Надмидцэдэнгийн. Развитие и обновление математического образования будущих инженеров в Монголии 156
Павлова А.И. Применение методов машинного обучения для агроэкологической группировки сельскохозяйственных земель 162
Павлова А.И., Ким С.А. Применение искусственных нейронных сетей для прогнозирования урожайности 167
Павлова Е.Б., Булгатова Е.Н., Елтошкина Е.В. Эффективные приемы и методы подготовки учащихся к успешной сдаче ЕГЭ по математике 171
Павлова Е.Б., Булгатова Е.Н., Елтошкина Е.В. Развитие геометрических представлений для эффективного использования в исследовательской деятельности 174
Пименов В.Г. Асимптотическое разложение глобальной погрешности в разностных методах решения диффузионных уравнений с функциональным запаздыванием 177
Рожкова С.В., Беляускене Е.А., Имас О.Н., Устинова И.Г., Янущик О.В. Формирование инженерного мышления посредством решения профильных задач в курсе математики 180
Рыгзынова М.В., Петрова С.С. Актуальные проблемы математического образования в условиях внедрения ФГОС нового поколения 183
Семенов Э.И., Косов А.А. О точных многомерных решениях нелинейной системы эллиптических уравнений со степенной нелинейностью 186
Семисалов Б.В., Шапеев В.П. О разрушении ламинарного течения полимерной жидкости типа Пуазейля в цилиндрическом канале 189
Тарасьев А.М., Усова А.А. Приведение гамильтоновой системы в положение устойчивого равновесия в задачах оптимального экономического роста 193
Трунин Д.О. Методы улучшения управления в системах с ограничением вида неравенства 197
Тырсин А.Н., Кащеев С.Е. Риск-анализ каскадных сбоев во взаимосвязанных гауссовых сетевых структурах 201
Устинова И.Г., Янущик О.В., Беляускене Е.А., Имас О.Н., Рожкова С.В. Графическая визуализация в тестах по математике 205
Финогенко И.А. О позиционных разрывных и импульсных управлениях 209
Фроловский В.Д. Математические модели и методы решения оптимизационных задач геометрического покрытия и их приложения 212
Хабибуллин Б.Н. Аппроксимация экспоненциальными системами, смешанные площади и дефект выпуклости дуги или кривой в направлении 216
Хамханов А. К., Мижидон А.Д. Математическая модель механической системы, состоящей из твердого тела, прикрепленного к двум упругим стержням 220
Ханхасаев В.Н., Баиров С.А. Решение нелинейного по коэффициенту теплопроводности смешанного уравнения интегро- интерполяционным методом с третьим краевым условием 224

Ханхасаев В.Н., Жамцаев Н.С. Разработка программного комплекса для нахождения многомерных интегралов методом Монте-Карло 228
Ханхасаева Я.В., Луцкий А.Е. Трехмерное обтекание летательного аппарата сложной формы при различных углах атаки и наличии энергоисточника 233
Ханхасаев В.Н., Муняев С.И. Решение смешанного уравнения теплопроводности с нелинейным источником тепла методом теплового баланса с третьим краевым условием 237
Ханхасаев В.Н., Пластинина В.М. Двухмерный пространственный случай первой краевой задачи для смешанного оператора теплопроводности 241
Чистяков В.Ф., Чистякова Е.В. О влиянии особых точек на численные процессы при решении начальных задач для дифференциально-алгебраических уравнений 245
Чупин И.А., Долгий Ю.Ф. Нахождение импульсных управлений для многозвенных манипуляционных роботов 248
Шаранхаев И.К. О позитивной полноте множества мультифункций ранга 2 252
Шориков А.Ф. Оптимизация программного управления прогнозированием состояния фазового вектора линейной дискретной управляемой динамической системы 255
Шориков А.Ф., Тюлюкин В.А., Компьютерное моделирование решения задач оптимального управления и минимаксного оценивания состояний дискретных динамических систем 259
Jundong Wang, Lijun Zhang, Elena Shchepakina, Vladimir Sobolev. Study on traveling wave solutions of singularly perturbed nonlinear wave equations: dynamical system approach 262
Lephoko M.Y.T., Khalique C.M. Travelling wave solutions of the fifth-order strain wave equation in microstructured solids 265
Nevena Mijajlovi´c, Milojica Ja´cimovi´c, On minimization with coupled constraints and quasi variational inequalities 267
Yao Qi, Yu Tian, Yuheng Jiang. Existence solitary wave solutions and periodic wave solutions for perturbed modified Gardner equation 268

УДК 519.6, 519.7

DOI 10.53980/9785907599970_8

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ИСТОЧНИКОВ СИСТЕМЫ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

К.Р. Айда-Заде[1], Е.Р. Ашрафова[2]
[1,2]Институт систем управленияМНО Азербайджана,
[1]Институт математики и механики МНО Азербайджана,
[2]Бакинский государственный университет,
kamil_aydazade@rambler.ru, ashrafova.yegana@gmail.com

Исследуется задача оптимизации параметров сосредоточенных источников, влияющих на функционирование динамического объекта сетевой структуры. Объект состоит из большого числа одномерных объектов, состояние каждого из которых описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями. На отдельные точки подобъектов и на точки их соединения воздействуют источники, места и мощности которых требуется оптимизировать, исходя из заданного целевого функционала задачи. Получены необходимые условия оптимальности по оптимизируемым параметрам сосредоточенных источников. На примере тестовой задачи приведены результаты численных экспериментов.

***Ключевые слова**: источники, размещение источников, нелокальные условия, условия оптимальности, градиент функционала.*

OPTIMIZATION OF SYSTEM PARAMETERS WITH NON-LOCAL CONDITIONS

K.R. Aida-Zade[1], E.R. Ashrafova[2]
1.2Institute of Control Systems of the Ministry of Education and Science of Azerbaijan,
1Institute of Mathematics and Mechanics of the Ministry of Education and Science of Azerbaijan,
2Baku State University,
kamil_aydazade@rambler.ru, ashrafova.yegana@gmail.com

The problem of calculating sources that affect the operation of a dynamic object of a network structure is investigated. The object consists of a large number of one-dimensional objects, the state of each of which is described by a system of ordinary differential cases with nonlocal boundary situations. At certain points of subobjects and at the points of their connection, the sources, places and powers required for specific purposes, come from the given target functional of the task. The corresponding estimation conditions for the optimized parameters of source collection are obtained. On the study of tests, the task was to calculate the results of numerical experiments.

***Key words:** sources, source placement, non-local conditions, uniqueness conditions, functional gradient.*

Введение

Исследована задача оптимизации месторасположения и значений мощностей сосредоточенных источников [1,2], влияющих на функционирование сложного объекта. Объект состоит из большого числа одномерных объектов, состояние каждого из которых описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями. Подобъекты связаны между собой в произвольном порядке лишь состояниями в своих начальных или конечных точках.

Подобные сложные объекты будем называть динамическими объектами сетевой структуры, по аналогии с [3], а соответствующие математические модели – сетевыми. Структуру таких объектов удобно представлять в виде ориентированного графа [4]. Предполагается, что граф неполный, т.е. бóльшая часть элементов матрицы связей равны нулю. Ненулевые элементы этой матрицы соответствуют наличию связи между начальными и конечными состояниями отдельных блоков, соответствующих смежным звеньям графа. К рассматриваемой задаче, в частности, приводится задача оптимального управления переходным процессом неустановившегося движения жидкости (газа) в трубопроводных сетях сложной структуры [5,6,7]. Математические модели этих процессов состоят из подсистем дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа, каждая из которых описывает процесс движения на отдельном участке трубопровода. В местах

соединения участков выполняются условия непрерывности потока и материального баланса, которые приводят к неразделенным краевым условиям. Применение метода прямых по временной или пространственной переменным (аналог применения метода декомпозиции) приводит задачу управления режимами движения сырья в транспортной сети к задаче, исследуемой в данной статье.

Постановка задачи

Рассматривается сложный объект, состоящий из mзвеньев (блоков), в произвольном порядке соединенных своими концами, структуру которого удобно представить в виде ориентированного графа. Множество всех вершин графа обозначим через I, а множество звеньев (k,s) длиной l^{ks} с началом в вершине $k \in I$ и концом в вершине $s \in I$ обозначим через $J = \{(k,s): k,s \in I\}$, $|I| = N$, $|J| = m$, $|I|$ указывает на число элементов множества I. Пусть $J_i^+ = \{(j,i): j \in I_i^+\}$, $J_i^- = \{(i,j): j \in I_i^-\}$ – множества звеньев соответственно входящих и выходящих из i-й вершины, I_i^+ и I_i^- – множества вершин, смежных с i-й вершиной, являющихся соответственно концами и началами звеньев из множества J, $J_i = J_i^+ \cup J_i^-$, $I_i = I_i^+ \cup I_i^-$. Обозначим $|J_i^+| = |I_i^+| = \overline{n}_i$, $|J_i^-| = |I_i^-| = \underline{n}_i$, $\overline{n}_i + \underline{n}_i = n_i$, $i \in I$. Ясно, что

$$\sum_{i \in I} \underline{n}_i = \underline{n}, \quad \sum_{i \in I} \overline{n}_i = \overline{n}, \quad \underline{n} + \overline{n} = 2m, \quad \sum_{i \in I} n_i = 2m.$$

В практических приложениях, как правило, имеет место соотношение $n_i << N$, $i \in I$, т.е. число вершин, смежных с какой-либо вершиной, много меньше общего числа вершин.

Каждой звено графа сопоставляется независимый подобъект (блок). Пусть состояние каждого из звеньев $(k,i) \in J$, $k \in I_i^+$, $i \in I$, описывается системой $\aleph$-мерных линейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du^{ki}(x)}{dx} = A^{ki}(x)u^{ki}(x) + B^{ki}w^{ki}\delta(x - \xi^{ki}) + f^{ki}(x),\ x \in (0, l^{ki}), \tag{2.1}$$

с M_i, $M_i \le n_i \cdot \aleph$, линейно независимыми краевыми условиями, заданными в неразделенном виде

$$\sum_{s=1, k_s \in I_i^-}^{n_i} g_j^{ik_s} u^{ik_s}(0) + \sum_{s=1, k_s \in I_i^+}^{\overline{n}_i} q_j^{k_s i} u^{k_s i}(l^{k_s i}) = \mathrm{v}_j^i, \quad j = \overline{1, M_i}, \quad i \in I. \tag{2.2}$$

Здесь функция $u^{ki}(x) = u^{ki}(x;\upsilon) \in \mathrm{R}^{\aleph}$ характеризует состояние (k,i)-го звена длиной l^{ki} в точке $x \in [0, l^{ki}]$; $\upsilon = (w, \mathrm{v}, \xi)$ – вектор оптимизируемых параметров, у которого параметры $w \in \mathrm{R}^{\mu}, w = (w^{ki} = (w_1^{ki}, ..., w_{\mu_{ki}}^{ki}) \in \Omega_{w^{ki}} \subset \mathrm{R}^{\mu_{ki}} : k \in I_i^+, i \in I)$, w_j^{ki} – j-я компонента μ_{ki}-мерного (k,i)-го внешнего источника, воздействующего на (k,i)-ю подсистему в точке $\xi^{ki} \in \Omega_{\xi^{ki}} \equiv [0, l^{ki}]$, $\xi = (\xi^{ki} : k \in I_i^+, i \in I)$, $\xi \in \mathrm{R}^{\overline{m}}$, $\overline{m} \le m$; $\mathrm{v} \in \mathrm{R}^M$, $\mathrm{v} = (\mathrm{v}^i \in \Omega_{\mathrm{v}^i} \subset \mathrm{R}^{M_i}, i \in I)$, $\mathrm{v}^i = (\mathrm{v}_1^i, ..., \mathrm{v}_{M_i}^i)^{\mathrm{T}}$, v_j^i – j-я компонента внешнего источника, воздействующего на i-ю вершину. Обозначим $\mu = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_k^+} \mu_{ki}$, $M = \sum_{i=1}^{N} M_i$. В задаче заданными являются: $A^{ki}(x) \ne \mathrm{const}$, $f^{ki}(x)$ – соответственно $\aleph$-мерные квадратные матричные и векторные непрерывные при $x \in [0, l^{ki}]$ функции; B^{ki} – $(\aleph \times \mu_{ki})$-мерные скалярные матрицы; строчные векторы $g_j^{ik_s} = (g_{j,1}^{ik_s}, ..., g_{j,\aleph}^{ik_s})$, $k_s \in I_i^-$, $s = \overline{1, \underline{n}_i}$, $q_j^{k_s i} = (q_{j1}^{k_s i}, ..., q_{j\aleph}^{k_s i})$, $k_s \in I_i^+$, $s = \overline{1, \overline{n}_i}$, $j = \overline{1, M_i}$, $i \in I$. Если $B^{ki} = 0_{\aleph \times \mu_{ki}}$, то это означает, что на (k,i)-м участке источников нет.

В практических задачах в зависимости от знака параметров источника w^{ki}, $k \in I_i^+$, $i \in I$, внешний источник в точке ξ^{ki} называется “оттоком” или “притоком”.

Общее число подсистем (2.1) равно числу звеньев m, текущие состояния которых связаны со смежными звеньями (блоками) в произвольном порядке лишь посредством неразделенных (нелокальных) краевых условий (2.2).Общее число дифференциальных уравнений в системе (2.1) равно $m\aleph$ и число краевых условий в (2.2), равное M, должны быть равны между собой: $M = m\aleph$.

Будем предполагать, что краевая задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение. Это, как известно [9], зависит лишь от матриц $A^{ki}(x)$, $k \in I_i^+$, векторов $g_j^{ik_s}$, $k_s \in I_i^-$, $s = \overline{1,\underline{n}_i}$, $q_j^{k_s i}$, $k_s \in I_i^+$, $s = \overline{1,\overline{n}_i}$, $j = \overline{1,M_i}$, $i \in I$, и не зависит от других данных, участвующих в задаче, в частности, от неизвестных векторов w, v, ξ.

На значения оптимизируемых в задаче параметров w^{ki}, ξ^{ki}, v^i, $k \in I_i^+, i \in I$, исходя из практических соображений, накладываются ограничения:

$$w^{ki} \in \Omega_{W^{ki}},\ \mathrm{v}^i \in \Omega_{V^i},\ \xi^{ki} \in \Omega_{\xi^{ki}} \equiv [0; l^{ki}],\ \Omega^{ki} = \Omega_{W^{ki}} \times \Omega_{V^i} \times \Omega_{\xi^{ki}}. \tag{2.4}$$

Будем предполагать, что множества допустимых значений $\Omega_{W^{ki}}$, Ω_{V^i} являются выпуклыми компактными.Требуется найти такие значения компонент вектора $\upsilon = (w, \mathrm{v}, \xi)$, при которых функционал

$$\Im(w, \mathrm{v}, \xi) = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \int_0^{l^{ki}} f_0^{ki}(u^{ki}(x), x)dx + \Phi(\underline{u}, \overline{u}, w, \mathrm{v}, \xi) \tag{2.5}$$

получает минимальное значение. Здесь заданные функции $f_0^{ki}(u^{ki}, x)$, $\Phi^i(\underline{u}^i, \overline{u}^i, w, \xi, \mathrm{v})$ непрерывно дифференцируемы по своим аргументам и использованы обозначения:

$$u = u(x) = (u^{ki}(x) : k \in I_i^+, i \in I),\ \underline{u}^i = \left(u^{ik_1}(0), ..., u^{ik_{\underline{n}_i}}(0)\right)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{\underline{n}_i \cdot \aleph},\quad \underline{u} = \left(\underline{u}^i : i \in I\right) \in \mathrm{R}^{\underline{n}},$$

$$\overline{u}^i = \left(u^{k_1 i}(l^{k_1 i}), ..., u^{k_{\overline{n}_i} i}(l^{k_{\overline{n}_i} i})\right)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{\overline{n}_i \cdot \aleph},\quad \overline{u} = \left(\overline{u}^i : i \in I\right) \in \mathrm{R}^{\overline{n}}.$$

Оптимизируемый конечномерный вектор (w, ξ, v), определяющий параметры и месторасположения внешних источников, в реальных задачах имеет небольшую размерность, несмотря на большую размерность самой системы дифференциальных уравнений (2.1).

Методы и результаты исследования

Исследованы выпуклость и дифференцируемость функционала (2.5), получены формулы для градиента функционала и сформулированы необходимые условия оптимальности относительно оптимизируемых параметров.

Теорема 1. Пусть выполнены все условия, наложенные на функции и параметры, участвующие в задаче (2.1), (2.2), (2.4), (2.5). *Если функции* $f_0^{ki}(u^{ki}, x)$, $\Phi(\underline{u}, \overline{u}, w, \mathrm{v}, \xi)$ *при фиксированном допустимом векторе* ξ *выпуклы по другим своим аргументам, то функционал* $\Im(w, \mathrm{v}, \xi)$ *является выпуклым по* w, v*, а если хотя бы одна из этих функций сильно выпукла, то и функционал является сильно выпуклым.*

Несложно доказать, что функционал $\Im(w, \mathrm{v}, \xi)$ по ξ не является выпуклым, если хотя бы для одного участка $(k, i) \in J$ выполняется условие $B^{ki} w^{ki} \neq 0$, т.е. имеются звенья, на которые воздействуют внешние источники.

Исследована дифференцируемость функционала (2.5) и полученные в работеформулы для компонент его градиента по оптимизируемой тройке $\upsilon = (w, \mathrm{v}, \xi)$. Сформулированы необходимые условия оптимальности в вариационной форме для задачи (2.1), (2.2), (2.4), (2.5).

Во многих практических приложениях внешние источники участвуют не на всех звеньяхи в вершинах объекта. В частности, на некоторых звеньях или вершинах их значения могут быть заданы и не оптимизироваться. В этих случаях соответствующие компоненты градиентов функционала $\mathrm{grad}_w \Im(w, \mathrm{v}, \xi)$, $\mathrm{grad}_{\mathrm{v}} \Im(w, \mathrm{v}, \xi)$, $\mathrm{grad}_{\xi} \Im(w, \mathrm{v}, \xi)$ не вычисляются и принимаются равными нулю.

Для определения оптимальных значений $\upsilon = (w, \mathrm{v}, \xi)$, применяя формулы для вычисления компонент градиента функционала задачи (2.1), (2.2), (2.4), (2.5), можно использовать эффективные методы оптимизации первого порядка, например, метод проекции градиента [8].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована задача оптимизации сетевой структуры, описываемая системой дифференциальных уравнений с обыкновенными производными большой размерности с нелокальными краевыми условиями. Показано, что сопряженная задача имеет ту же специфику, что и прямая задача, а в выражениях компонент градиента функционала по параметрам источников участвуют значения прямой и сопряженной переменных, определенных только в соответствующих вершинах и блоках.

Библиография

1. Miller B.M., Rubinovich E.Y. Impulsive Control with Impulsive Actions of Two Types //Autom. Remote Control. 2009. V. 70**.** No. 11.P. 1795–1813.

2. Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R. Optimal Control of Sources on SomeClasses of Functions // Optimization: A Journal of MathematicalProgramming and Operations Research. 2014. V. 63. No. 7. P. 1135–1152.

3. Aida-zade K.R. Investigation of Non-Linear Optimization Problems of Networks Structure // Autom. Remote Control. 1990. V. 51. No. 2. P. 135–145.

4. Черноусько Ф.Л. Оптимальное перемещение многозвенной системы в среде с сопротивлением // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17. № 2. С. 240–255.

5. Воеводин А.Ф., Шугрин С.М. Методы решения одномерных эволюционных систем, Новосибирск: ВО Наука, 1993.

6. Aida-zade K.R., Bagirov A.H. On the Problem of Placement of Oil Wells and Control of Their Flow-rates // Autom. Remote Control. 2006. No. 1. P. 52–61.

7. Aida-zade K.R., Ashrafova E.R. Numerical Solution to the Problem of Determination of Places and Volume of the Fluid Leakage under Non-stationary Regimes in a Pipeline Network // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2017. V. 57. No. 12. P. 1919–1934.

8. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс. 2002.

УДК 51-7

DOI 10.53980/9785907599970_12

ТЕРМИНАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕЙ КОНИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Антипин А. С.*, Хорошилова Е. В.**
**ФИЦ «Управление и информатика» Вычислительный центр РАН, Россия, Москва,asantip@yandex.ru*
*** Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, Москва khorelena@gmail.com*

Рассматривается новый подход к решению задач терминального управления с линейной динамикой и краевой задачей линейного конического программирования. Ограничения в краевой задаче имеютвид равенств и определяются принадлежностью конусу с вершиной в нуле. Основу подхода составляют лагранжев формализм и теория двойственности, формулируются достаточные условия оптимальности. Для решения задачи предложен седловой методэкстраградиентного типа. Доказана сходимость метода к решению задачи по всем переменным.

Ключевые слова: *оптимальное управление, коническое программирование, функция Лагранжа, двойственность, седловой подход, сходимость.*

TERMINAL CONTROL OF BOUNDARYVALUE CONIC PROGRAMMING PROBLEM

Antipin A.S., KhoroshilovaE.V.
**FRC "Control and Informatics", Computing Center of RAS, Russia, Moscow, asantip@yandex.ru*
*** Lomonosov Moscow State University, CMC Faculty, Russia, Moscow khorelena@gmail.com*

A new approach to solving terminal control problems with phase constraints, based on sufficient optimality conditions, is considered. In the boundary value problem, the constraints have the form of equalities and are determined by belonging to a cone with a vertex at zero.The approach is based on the Lagrangian formalism and duality theory, and sufficient optimality conditions are formulated.To solve problems, a saddle-point method of an extragradient type is proposed. The convergence of the method to the solution of the problem in all variables is proved.

Key words*: optimal control, conic programming,Lagrange function, duality, saddle-point approach, convergence.*

Введение

Линейное программирование и оптимальное управление представляют собой фундамент, на котором продолжает возводиться обширное здание математического моделирования. Объединение моделей конечномерного программирования с управляемой динамикой порождает новые конструкции,которые принимают на себя новые вызовы, идущие от мультиагентных систем, сетецентрического управления и искусственного интеллекта.Задачи терминального управления с различными постановками и, в частности, разными видами краевых задач на концах отрезка времени исследовались авторами в [2–10], важность такого рода исследований в создании теории новых методов решения задач терминального управления отмечалась в недавней работе [1].

В данной работе рассматривается математическая модель, которая включает в себя линейную управляемую динамику и краевую задачу линейного программирования.Последняя относится к каноническому формату и включает ограничения типа равенств и геометрическое множество в форме конуса с вершиной в нуле.Эти задачи в варианте конечномерного программирования в последнее время стали особенно популярными. Интрига этих задач состоит в том, что для них развиты методы внутренних точек, для которых получены оценки убывания по функционалу полиномиального типа, в то время как симплекс-метод имеет аналогичную оценку экспоненциального типа. Последняя оценка хуже, чем первая.Это кажется неожиданным, поскольку симплекс-метод сходится к решению

задачиза конечное число шагов, в то время как первый – за бесконечное число.(Впрочем, имеется пример, когда симплекс-метод, стремясь к минимуму функции,пробегает по всем вершинам многогранника, у которого вершин может быть сколь угодно много).

Полученные достаточные условия оптимальности, в отличие от необходимых условий принципа максимума,позволяют развивать доказательную теорию методов решения задач оптимального управления.

1. Постановка задачи

Рассмотрим простейшую постановку линейной задачи оптимального управления. Пусть управление пробегают все множество управлений $u \in U$,тогда линейная управляемая динамика задачи порождает траекторию $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, правый конец которой $x(t_1) = x_1^*$ описывает терминальное множество $X_1 = X(t_1) \subset R^n$, называемое множеством достижимости:

$$\{\frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \qquad t \in [t_0, t_1],$$
$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1^* \in X_1^*, u \in U = \{u(\cdot) \in L_2^r[t_0, t_1]\}, \ x_1^* \in Argmin\{\langle \varphi_1, x_1\rangle \mid A_1 x_1 = b_1, \ x_1 \in K \subset R^n\},$$

где$D(t), B(t)$–непрерывные матрицы размера $n \times n$,$n \times r$; b_1, x_0– заданные векторы;A_1 –фиксированная матрица размера $m \times n$ $(m \le n)$,K–конус с вершиной в нуле;φ–заданный вектор (нормаль к линейному целевому функционалу); X_1–множество достижимости, которое описывает правый конец x_1 фазовой траектории, когда $u(t) \in U[t_0, t_1]$. Управления $u(t)$ при каждом $t \in [t_0, t_1]$принадлежатU– выпуклому компакту из R^r. Естественно, предполагается, что множество достижимости и допустимое множество задачи имеют не пустое пересечение. На отрезке$[t_0, t_1]$требуется на множестве управлений U выбрать такое управление $u^*(t)$, что отвечающая ему единственная траектория $x^*(t)$ дифференциальной системы соединяет свое начальное значение x_0с терминальным решением задачи линейного программированияx_1^* на правом конце.

2. Метод решения

Для решения задачи предложен седловой метод, основанный на поиске седловых точек функции Лагранжа. Поскольку седловой градиентный метод порождает векторное поле вращения вокруг центра, т. е. седловой точки, тоитерация седлового метода распадается на две полушага.Формулы итеративного метода имеют вид:

Прогнозный полушаг:

$\frac{d}{dt}x^k(t) = D(t)x^k(t) + B(t)u^k(t), x^k(t_0) = x_0,$

$\underline{p}_1^k = \pi_K\left(p_1^k + \alpha\left(A_1 x_1^k - b_1\right)\right),$

$\frac{d}{dt}\psi^k(t) + D^T(t)\psi^k(t) = 0, \psi_1^k = \varphi_1 + A_1^T p_1^k,$

$\underline{u}^k(t) = \pi_U\left(u^k(t) - \alpha B^T(t)\psi^k(t)\right);$

Основной полушаг:

$\frac{d}{dt}\underline{x}^k(t) = D(t)\underline{x}^k(t) + B(t)\underline{u}^k(t), \underline{x}^k(t_0) = x_0,$

$p_1^{k+1} = \pi_K\left(p_1^k + \alpha\left(A_1 \underline{x}_1^k - b_1\right)\right),$

$\frac{d}{dt}\underline{\psi}^k(t) + D^T(t)\underline{\psi}^k(t) = 0, \underline{\psi}_1^k = \varphi_1 + A_1^T \underline{p}_1^k,$

$u^{k+1}(t) = \pi_U\left(u^k(t) - \alpha B^T(t)\underline{\psi}^k(t)\right), \ k = 0,1,2,\ldots$

Здесь на каждом полушаге решаются два дифференциальных уравнения и осуществляется итеративный шаг по управлениям. Отметим, что в этом процессе итерации по прямым переменным $\left(x^k(t), u^k(t)\right)$ при всех k всегда принадлежат допустимым множествам, т. е. являются решениями дифференциальных уравнений нашей системы.

3. Заключение

В работе рассматривается линейная задача оптимального управления в гильбертовом

пространстве, в основе которой лежит линейная динамика и терминальная задача линейного конического программирования на правом конце временного интервала. Для решения задачи предлагается метод, в основе которого лежит метод вычисления седловой точки функции Лагранжа. Доказывается сходимость этого метода по всем переменным задачи оптимального управления: а именно, сильная сходимость (по норме гильбертова пространства) для фазовых, сопряженных, терминальных конечномерных переменных и слабая сходимость по управлению. Только доказательные вычислительные технологии преобразуют математические модели в инструмент принятия гарантированных решений.

Библиография

1. *Aharon Ben-Tal and Arkadi Nemirovski*. Lectures on modern convex optimization 2020/2021/2022/2023. Transparencies: https://www.isye.gatech.edu/nemirovs/LMCOTR2021.pdf
2. *Antipin A.S., Khoroshilova E.V.* Optimal control with connected initial and terminal conditions // Proc. Steklov Inst. Math. 2015. − V. 289, № 1. Suppl. − P. 9−25.
3. *Antipin A.S., Khoroshilova E.V.* Linear Programming and Dynamics //Ural Math. J. 2015. − V. 1,№1.− P. 3−19.
4. *Antipin A.S., Khoroshilova E.V.* Saddle-point approach to solving problemof optimal control with fixed ends // J. Global Optim. 2016.− V. 65, № 1. − P. 3−17.
5. *Antipin A.S., Khoroshilova E.V.* Controlled dynamic model withboundary-value problem of minimizing a sensitivity function //Optim. Lett. 2019. −V. 13,№ 3. −P. 451−473.
6. *Antipin A.S., Khoroshilova E.V.* Dynamics, phase constraints, and linear programming // Comput. Math. Math. Phys. 2020. − V. 60,№ 2. – P. 184−202.
7. *Antipin A., Khoroshilova E.*: Saddle-point method in terminal control with sections in phase constraints // Lecture Notes in Computer Science. 2020.− V. 12422.− P. 17–26.
8. *Antipin, A.S., Khoroshilova, E.V.* Optimal control of two linear programmingproblems // Lecture Notes in Computer Science. 2021.−V. 13078.− P. 151−164.
9. *Antipin A.S., Khoroshilova E.V.* Linear dynamics control with intermediateconstraints // Proceedings of the 8thInternational Conference on Control and Optimization with IndustrialApplications (COIA 2022). – 2022. −V. 2.– P. 111−113. Baku State University Baku, Azerbaijan.
10. *Antipin A.S., Khoroshilova E.V.* Terminal Control of Multi-Agent System // Lecture Notes in Computer Science. 2022. −V. 13781. −P. 5−16.

Bibliography

1. *Aharon Ben-Tal and Arkadi Nemirovski*. Lectures on modern convex optimization 2020/2021/2022/2023. Transparencies: https://www.isye.gatech.edu/nemirovs/LMCOTR2021.pdf
2. *Antipin A.S., Khoroshilova E.V.* Optimal control with connected initial and terminal conditions // Proc. Steklov Inst. Math. 2015. − V. 289, № 1. Suppl. − P. 9−25.
3. *Antipin A.S., Khoroshilova E.V.* Linear Programming and Dynamics //Ural Math. J. 2015. − V. 1, №1.− P. 3−19.
4. *Antipin A.S., Khoroshilova E.V.* Saddle-point approach to solving problemof optimal control with fixed ends // J. Global Optim. 2016.− V. 65,№ 1. − P. 3−17.
5. *Antipin A.S., Khoroshilova E.V.* Controlled dynamic model withboundary-value problem of minimizing a sensitivity function //Optim. Lett. 2019. −V. 13,№ 3. −P. 451−473.
6. *Antipin A.S., Khoroshilova E.V.*: Dynamics, phase constraints, and linear programming // Comput. Math. Math. Phys. 2020. − V. 60,№ 2. – P. 184−202.
7. *Antipin A., Khoroshilova E.*: Saddle-point method in terminal control with sections in phase constraints // Lecture Notes in Computer Science. 2020.− V. 12422.− P. 17–26.
8. *Antipin, A.S., Khoroshilova, E.V.* Optimal control of two linear programmingproblems // Lecture Notes in Computer Science. 2021.−V. 13078.− P. 151−164.
9. *Antipin A.S., Khoroshilova E.V.* Linear dynamics control with intermediateconstraints // Proceedings of the 8thInternational Conference on Control and Optimization with IndustrialApplications (COIA 2022). Baku State University Baku, Azerbaijan.2022. −V. 2.– P. 111−113.
10. *Antipin A.S., Khoroshilova E.V.* Terminal Control of Multi-Agent System // Lecture Notes in Computer Science. 2022. −V. 13781.−P. 5−16.

УДК 519.642.5

DOI 10.53980/9785907599970_15

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ НА ЗАШУМЛЕННЫХ ДАННЫХ МЕТОДОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ [1*]

Антипина Е.Д.[1,2], Солодуша С.В.[1], Спиряев В. А.[1]
[1] *Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,*
Россия, Иркутск, solodusha@isem.irk.ru
[2] *Иркутский государственный университет, Россия, Иркутск*
kate19961231@gmail.com

В статье рассматривается построение интегральной модели в виде квадратичного полинома Вольтерра на основе реальных данных, искаженных ошибками измерений входного сигнала динамической системы. Алгоритм решения задачи идентификации основан на восстановлении интегралов от ядер Вольтерра. Сглаживающий кубический сплайн применяется для устранения шума исходных данных. Представлены результаты вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: *моделирование, интегрирование произведения, зашумленные данные.*

IDENTIFICATION OF INTEGRATED MODELS OF NONLINEAR DYNAMICS ON NOISY DATA BY THE PRODUCT INTEGRATION METHOD

Antipina E.D.[1,2], Solodusha S.V.[1], Spiryaev V. A.[1]
[1] *Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Russia, Irkutsk*
solodusha@isem.irk.ru
[2] *Irkutsk State University, Russia, Irkutsk, kate19961231@gmail.com*

The article deals with the construction of an integral model in the form of a quadratic Volterra polynomial based on real data distorted by measurement errors of the input signal of a dynamic system. The algorithm for solving the identification problem is based on the reconstruction of integrals from the Volterra kernels. A smoothing cubic spline is used to remove noise from the original data. The results of a computational experiment are presented.

Key words*: modeling, product integration, noisy data.*

Введение

Интегральные модели на основе полиномов Вольтерра используются для решения задач моделирования, автоматического управления нелинейной динамикой, а также для диагностики технического состояния объектов. Универсальность моделей типа «вход-выход» позволяет использовать их для принципиально разных физических явлений.

В работе [1] описаны элементы теории и этапы реализации вычислительной технологии построения полиномов Вольтерра с векторными входными сигналами. Представленные алгоритмы основаны на использовании *n*-параметрических семейств кусочно-постоянных тестовых сигналов в виде линейной комбинации функций Хевисайда с отклоняющимся аргументом [2]. Эта унифицированная методика была успешно реализована на имитационных моделях динамики элемента теплообменной установки, ветроэнергетической установки с горизонтальной осью вращения, на реальных данных Высокотемпературного контура Института систем энергетики СО РАН, а также по данным, полученным с использованием цифрового двойника типового энергоблока Назаровской ГРЭС [3].

Целью данной работы является развитие методики идентификации интегральных моделей в виде квадратичных полиномов Вольтерра [2] для их дальнейшего применения в задаче восстановления управляющих воздействий [1]. Перейдем к обсуждению возможных путей повышения точности моделирования нелинейной динамики с учетом специфики технического (энергетического) объекта.

[1*] Работа выполнена в Институте систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00409), https://rscf.ru/project/22-21-00409.

1. Постановка задачи

Метод идентификации квадратичного полинома Вольтерра

$$\int_0^t K_1(s_1)x(t-s_1)ds_1 + \\ + \int_0^t\int_0^t K_2(s_1,s_2)x(t-s_1)x(t-s_2)ds_1ds_2 = y(t), \\ t\in[0,T], y(0)=0, \tag{1}$$

представлен в [2] и получил свое развитие в направлении, связанным с новым подходом к построению (1) за счет восстановления интегралов от ядер Вольтерра.

Предложенный в [1, 2] подход к восстановлению ядер $K_i,\ i=1,2$ требует выполнения условия гладкости правой части (1) $y(t)\in C^{(2)}_{[0,T]},$ а также дополнительных требований к разрешимости двумерных интегральных уравнений Вольтерра первого рода в классе непрерывных функций, симметричных на $\Omega=\{s_1,s_2: 0\le s_1,s_2\le T\}$. Чтобы избежать этих жестких требований, рассмотрим подход, основанный на использовании метода интегрирования произведения (product integration) [4]:

$$\int_0^{ih} K(s)x(ih-s)ds \approx \sum_{j=1}^{i} x_{i-j+\frac{1}{2}} \int_{(j-1)h}^{jh} K(s)ds, \tag{2}$$

где $t_i=ih, nh=T, i=\overline{1,n},$ h – шаг дискретизации. Данный подход имеет хорошие перспективы применения, в том числе и на исходных данных, искаженных погрешностями измерений. Результаты вычислительных экспериментов, проведенных в [5], показали точность вычисления правой части

$$\sum_{j=1}^{i} x_{i-j+\frac{1}{2}} \int_{(j-1)h}^{jh} K_1(s_1)ds_1 + \\ \sum_{j=1}^{i}\sum_{l=1}^{i} x_{i-j+\frac{1}{2}} x_{i-l+\frac{1}{2}} \int_{(j-1)h}^{jh}\int_{(l-1)h}^{lh} K_2(s_1,s_2)ds_1ds_2 = y(t_i) \tag{3}$$

приемлемой для практического использования. Интегралы от ядер Вольтерра в (3) идентифицируются на основе кусочно-постоянных тестовых входных сигналов [2]. Модель вида (3) является сеточным аналогом (1), полученным с помощью обобщения (2). Заметим, что процедура дискретизации, согласно [6], обладает свойством саморегуляции, т.е. согласованием дискретного шага h с уровнем погрешности исходных данных δ.

2. Основные результаты

В данной работе рассмотрена задача моделирования динамики теплотехнического оборудования на основе данных, полученных с помощью цифрового двойника локального участка пароводяного тракта типового энергоблока Назаровской ГРЭС. В выбранный участок входят: конденсатор типа 80-КЦС-1, система конденсатных электронасосов и подогреватель низкого давления (ПНД). Цифровой двойник представлен в виде базы данных, полученных с помощью программы «Р150» [3].

Модель типа «вход-выход» имеет два входных сигнала: расход пара ΔD_{1V} ΔD_{1v} и расход воды ΔD_W ΔD_{1v}. Предполагаем, что изменение по первому сигналу $\Delta D_{1V}=0$ $\Delta D_{1v}=0$. В качестве выходного сигнала рассматриваем отклонение давления Δp от стационарного значения в конденсаторе $p_0=4063{,}13$ Па.

Зашумление исходных данных устраняем с помощью сглаживающего кубического сплайна (СКС). Подробный алгоритм построения СКС представлен в [7]. Шум является случайной величиной, поэтому выполнено построение серии квадратичных моделей вида (3). Анализ точности моделирования проводился на основе значений

$$\varepsilon_1=\max_{t_i\in[0,120]}\frac{|y_{et}(t_i)-\widetilde{y}(t_i)|}{y_{et}(t_i)}\cdot 100, \qquad \varepsilon_2=\max_{t_i\in[0,120]}\frac{|y_{et}(t_i)-\widetilde{y}(t_i)|}{y_{et}(t_i)}\cdot 100,$$

ε_2 где $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ – относительные погрешности моделей, построенных на зашумленных $\widetilde{y}(t)$ и

сглаженных $\overline{y}(t)$ исходных данных соответственно. В качестве тестового примера выбран входной сигнал: $x_\omega^\gamma(t) = \gamma\big(e(t) - 2e(t-\omega) + e(t-T)\big)$, $x_\omega^\gamma(t) = \gamma(e(t) - 2e(t-\omega) + e(t-T))$ где $0 \le \omega \le t \le T$, $\gamma = 25\% D_{W_0}$ $\gamma = 25\% D_{w_0}$, $D_{W_0} = 11562{,}2$ кг/с.

Таблица 1 – Значения относительных погрешностей $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

№	ε_1	ε_2
1	9,826	6,064
2	10,997	5,345
3	8,957	4,768
4	7,974	3,454
5	10,363	6,454
6	8,000	3,559
7	8,272	3,746
8	6,767	4,569
9	10,010	3,610
Среднее	9,018	4,618

Из таблицы 1 видно, что средняя ошибка интегральной модели для выбранного сигнала при зашумленных выходах составляет 9%, а для выходов, отфильтрованных с помощью СКС – 4,6%. Таким образом, используемый в работе фильтр позволяет повысить точность моделирования почти в два раза.

Библиография

1. *Solodusha S. V., Bulatov M. V.* Integral equations related to Volterra series and inverse problems: elements of theory and applications in heat power engineering // Mathematics. 2021. – Vol. 9, No. 16.– P. 1905.

2. *Апарцин А.С.* Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. – Н.: Наука, 1999. – 193 с

3. *Таиров Э. А., Логинов А. А., Чистяков В. Ф.* Математическая модель, численные методы и программное обеспечение тренажера для энергоблока Иркутской ТЭЦ – 10. – Иркутск: СЭИ СО РАН, 1999. – Препринт № 11. – 43 с. 4.

4. *Linz P.* Product integration method for Volterra integral equations of the first kind. // BIT. 1971. – Vol. 11.– P. 314–421.

5. *Solodusha S. V., Spiryaev V. A., Tairov E. A.* Numerical modeling of dynamics of thermal power equipment of the power unit at the Nazarovo power station by Volterra polynomial // Proc. of the 2019 XXI International Conference Complex Systems: Control and Modeling Problems. – Samara, Russia, 2019.

6. *Апарцин А.С., Бакушинский А.Б.* Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратурных сумм // Дифф. и интегр. уравнения – 1972. – Вып. I. – С. 248–258.

7. *Воскобойников Ю.Е., Преображенский Н.Г., Седельников А.И.* Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. – Н.: Наука, 1984. – 238 с.

Bibliography

1. *Solodusha S. V., Bulatov M. V.* Integral equations related to Volterra series and inverse problems: elements of theory and applications in heat power engineering [Mathematics], 2021. Vol. 9, No. 16.– P. 1905.

2. *Apartsin A. S.* Non-classical Volterra equations of the first kind: theory and numerical methods. – Novosibirsk: Nauka, 1999.

3. *Tairov E. A., Loginov A. A., Chistyakov V. F.,* Mathematical model, numerical methods and software of the simulator for the generating unit of the Irkutsk CHP-10. – Irkutsk: SEI SB RAS. Preprint no. 11, 1999.

4. *Linz P.* Product integration method for Volterra integral equations of the first kind [BIT]. Vol. 11, 1971. – P. 314–421.

5. *Solodusha S. V., Spiryaev V. A., Tairov E. A.* Numerical modeling of dynamics of thermal power equipment of the power unit at the Nazarovo power station by Volterra polynomial [Proc. of the 2019 XXI International Conference Complex Systems: Control and Modeling Problems]. – Samara, Russia, 2019.

6. *Apartsin A. S., Bakushinskij A. B.* Priblizhennoe reshenie integral'nykh uravnenij Vol'terra I roda metodom kvadraturnykh summ [Diff. i integr. Uravneniya]. 1972. Vol. I. – P. 248–258.

7. *Voskoboinikov Yu. E., Preobrazhensky N. G., Sedelnikov A. I.* Mathematical processing of experiment in molecular gas dynamics. – Novosibirsk: Nauka, 1984. – 238.

УДК 517.98

DOI 10.53980/9785907599970_19

УСЛОВИЕ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ДЛЯ КОЛЕБАНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ НА БАЛКЕ ЭЙЛЕРА-БЕРНУЛЛИ

Баргуев С.Г.

Бурятский институт инфокоммуникаций и информатики (филиал)
Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики,
Россия, Улан-Удэ, barguev@yandex.ru

В статье выводится условие ортогональности для собственных колебаний твердого тела с двумя степенями свободы, закрепленное при помощи двух пружин на балке Эйлера-Бернулли.

Ключевые слова: *балка Эйлера-Бернулли, твердое тело, две степени свободы ,собственные частоты.*

ORTHOGONALITY CONDITION FOR SOLID VIBRATIONS WITH TWO DEGREES OF FREEDOM ON EULER-BERNOULLI BEAM

Barguev S.G.

Buryat Institute of Information Communications and Informatics (branch) of the Siberian State University of Telecommunications and Informatics,Russia, Ulan-Ude, barguev@yandex.ru

The article displays an orthogonality condition for the eigenvibrations of a solid with two degrees of freedom, fixed using two springs on the Euler-Bernoulli beam.

Keywords: *Euler-Bernoulli beam, solid, two degrees of freedom, eigenfrequency.*

Введение

Важное значение для практики имеет изучение колебательных процесссов во временном интервале, происходящие в замкнутой механической системе. В этом случае удается отслеживать характер изменения важных физических параметров системы, выявлять, например, в ответственных узлах максимально допустимые напряжения, а также амплитуды. Такого рода процессы могут изучаться путем решения начально-краевой задачи. Постановка начально-краевой задачи для изучаемой механической системы в виде твердого тела с двумя степенями свободы, закрепленного на балке Эйлера-Бернулли упругими связями подразумевает задание системы дифференциальных уравнений, описывающих ее движение, задание начальных значений для обобщенных координат и скоростей твердого тела, смещений и скоростей точек оси балки и их определение в зависимости от времени, то есть решение начально-краевой задачи. Для ее решения обобщенные координаты и смещение точек оси балки раскладываются в конечный ряд по собственным формам балки с неизвестными временными коэффициентами. Для определения этих коэффициентов используется условие ортогональности собственных колебаний системы.Таким образом, отыскание условия ортогональности является важным этапом при решении начально-краевой задачи.

1.Гибридная система дифференциальных уравнений

Гибридная система дифференциальных уравнений, описывающая движение рассматриваемой механической системы имеет вид [1] :

$$\begin{aligned} &m\frac{d^2z}{dt^2}+c_1(z-d_1\varphi-u(a_1,t))+c_2(z+d_2\varphi-u(a_2,t))=0\\ &J_\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2}-c_1d_1(z-d_1\varphi-u(a_1,t))+c_2d_2(z+d_2\varphi-u(a_2,t))=0\\ &\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+b\frac{\partial^4u}{\partial x^4}=e_1(z-d_1\varphi-u(x,t))\delta(x-a_1)+e_2(z-d_2\varphi-u(x,t))\delta(x-a_2) \end{aligned} \quad (1)$$

* Работа выполнена в рамках Государственного задания 071-03-2023-001 от 19.01.2023

где $u(x,t)$-смещение точки оси балки с координатой x в момент времени t, $z(t)$-смещение центра масс C твердого тела, $\varphi(t)$-угол поворота тела вокруг центра масс C, m – масса твердого тела, c_1 и c_2- жесткости пружин, ρ-объемная плотность материала стержня, F –площадь поперечного сечения балки, E- модуль упругости балки, J – момент инерции поперечного сечения балки относительно нейтральной линии сечения, перпендикулярной к плоскости колебаний, J_φ-момент инерции твердого тела относительно его центра масс C при повороте на угол φ, d_1-расстояние от C до оси пружины закрепленной в точке a_1, d_2-соответственно до оси пружины закрепленной в точке a_2, $e_1 = \dfrac{c_1}{\rho F}$, $e_2 = \dfrac{c_2}{\rho F}$, l-длина балки.

В системе дифференциальных уравнений (1) функция $u(x,t)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0 \qquad (2)$$

Решение системы записываем в виде :

$$z = A\sin(\omega t + \gamma),$$
$$\varphi = B\sin(\omega t + \gamma), \qquad (3)$$
$$u(x,t) = V(x)\sin(\omega t + \gamma)$$

где A и B-неизвестные амплитуды, ω-частота, γ-начальная фаза.

Подставляя в (1), получим

$$-mA\omega^2 + c_1(A - d_1B - V(a_1)) + c_2(A + d_2B - V(a_2)) = 0, \qquad (4)$$
$$-J_\varphi B\omega^2 - c_1d_1(A - d_1B - V(a_1)) + c_2d_2(A + d_2B - V(a_2)) = 0, \qquad (5)$$
$$-\omega^2V(x) + bV^{(4)}(x) = e_1(A - d_1B - V(x))\delta(x - a_1) + \\ +e_2(A + d_2B - V(x))\delta(x - a_2). \qquad (6)$$

Обобщенное решение уравнения (6) согласно [1] имеет вид:

$$V(x) = \overline{V_1}(x - a_1)e_1(A - d_1B - V(a_1)) + \overline{V_2}(x - a_2)e_2(A + d_2B - V(a_2)), \qquad (7)$$

где функции $\overline{V_1}(x), \overline{V_2}(x)$ являются решениями краевых задач

$$-\omega^2\overline{V}(x) + b\frac{d^4\overline{V}(x)}{dx^4} = \delta(x),$$
$$\overline{V}(-a_1) = \overline{V}(l - a_1) = 0, \qquad (8)$$
$$\frac{d\overline{V}}{dx}(-a_1) = \frac{d\overline{V}}{dx}(l - a_1) = 0,$$

$$-\omega^2\overline{V}(x) + b\frac{d^4\overline{V}(x)}{dx^4} = \delta(x),$$
$$\overline{V}(-a_2) = \overline{V}(l - a_2) = 0, \qquad (9)$$
$$\frac{d\overline{V}}{dx}(-a_2) = \frac{d\overline{V}}{dx}(l - a_2) = 0.$$

соответственно.

2.Вывод условия ортогональности

Запишем (6) в виде

$$-\omega_i^2V_i(x) + bV_i^{(4)}(x) = e_1(A_i - d_1B_i - V_i(x))\delta(x - a_1) + \\ +e_2(A_i + d_2B_i - V_i(x))\delta(x - a_2).$$

Умножим обе части на $V_j(x)$ и проинтегрируем:

$$-\omega_i^2\int_0^l V_i(x)V_j(x)dx+b\int_0^l V_i^{(4)}(x)V_j(x)dx=e_1(A_i-d_1B_i-V_i(a_1))V_j(a_1)+$$

$$+e_2(A_i+d_2B_i-V_i(a_2))V_j(a_2).$$

Из закона сохранения энергии механической системы следует, что

$$\int_0^l V_i^{(4)}(x)V_j(x)dx=\int_0^l V_{ixx}(x)V_{jxx}(x)dx\ .$$

Тогда

$$-\omega_i^2\int_0^l V_i(x)V_j(x)dx+b\int_0^l V_{ixx}(x)V_{jxx}(x)dx=e_1(A_i-d_1B_i-V_i(a_1))V_j(a_1)+$$

$$+e_2(A_i+d_2B_i-V_i(a_2))V_j(a_2). \qquad (10)$$

Для другого значения индекса из (10) получим

$$-\omega_j^2\int_0^l V_j(x)V_i(x)dx+b\int_0^l V_{jxx}(x)V_{ixx}(x)dx=e_1(A_j-d_1B_j-V_j(a_1))V_i(a_1)+$$

$$+e_2(A_j+d_2B_j-V_j(a_2))V_i(a_2). \qquad (11)$$

Домножим (10) на (-1), и сложим с (11)

$$\left(\omega_i^2-\omega_j^2\right)\int_0^l V_i(x)V_j(x)dx=e_1\left(A_jV_i(a_1)-A_iV_j(a_1)\right)+e_1d_1\left(B_iV_j(a_1)-B_jV_i(a_1)\right)+$$

$$+e_2\left(A_jV_i(a_2)-A_iV_j(a_2)\right)+e_2d_2\left(B_jV_i(a_2)-B_iV_j(a_2)\right) \qquad (12)$$

Перепишем (4) в виде

$$-mA_i\omega_i^2+c_1(A_i-d_1B_i-V_i(a_1))+c_2(A_i+d_2B_i-V_i(a_2))=0$$

Домножим обе части на A_j:

$$-mA_iA_j\omega_i^2+c_1A_iA_j-c_1d_1B_iA_j-c_1A_jV_i(a_1)+c_2A_iA_j+c_2d_2B_iA_j-c_2A_jV_i(a_2)=0 \qquad (13)$$

Для другого значения индекса из (13) получим

$$-mA_jA_i\omega_j^2+c_1A_jA_i-c_1d_1B_jA_i-c_1A_iV_j(a_1)+c_2A_jA_i+c_2d_2B_jA_i-c_2A_iV_j(a_2))=0 \qquad (14)$$

Домножим (13) на (-1), и сложим с (14)

$$\left(\omega_i^2-\omega_j^2\right)mA_iA_j+c_1d_1\left(B_iA_j-B_jA_i\right)+c_1\left(A_jV_i(a_1)-A_iV_j(a_1)\right)-c_2d_2\left(B_iA_j-B_jA_i\right)+$$

$$+c_2\left(A_jV_i(a_2)-A_iV_j(a_2)\right) \qquad (15)$$

Перепишем (5) в виде

$$-J_\varphi B_i\omega_i^2-c_1d_1(A_i-d_1B_i-V_i(a_1))+c_2d_2(A_i+d_2B_i-V_i(a_2))=0$$

Домножим обе части на B_j:

$$-J_\varphi B_iB_j\omega_i^2-c_1d_1A_iB_j+c_1d_1^2B_iB_j+c_1d_1B_jV_i(a_1)+c_2d_2A_iB_j+c_2d_2^2B_iB_j-c_2d_2B_jV_i(a_2)=0 \qquad (16)$$

Для другого значения индекса из (16) получим

$$-J_\varphi B_jB_i\omega_j^2-c_1d_1A_jB_i+c_1d_1^2B_jB_i+c_1d_1B_iV_j(a_1)+c_2d_2A_jB_i+c_2d_2^2B_jB_i-c_2d_2B_iV_j(a_2)=0 \qquad (17)$$

Домножим (16) на (-1), и сложим с (17)

$$\left(\omega_i^2-\omega_j^2\right)J_\varphi B_iB_j+c_1d_1\left(A_iB_j-A_jB_i\right)-c_1d_1\left(B_jV_i(a_1)-B_iV_j(a_1)\right)-c_2d_2\left(A_iB_j-A_jB_i\right)+$$

$$+c_2d_2\left(B_jV_i(a_2)-B_iV_j(a_2)\right)=0 \qquad (18)$$

Домножим (12) на ρF , получим

$$\left(\omega_i^2-\omega_j^2\right)\rho F\int_0^l V_i(x)V_j(x)dx=c_1\left(A_jV_i(a_1)-A_iV_j(a_1)\right)+c_1d_1\left(B_iV_j(a_1)-B_jV_i(a_1)\right)+$$
$$+c_2\left(A_jV_i(a_2)-A_iV_j(a_2)\right)+c_2d_2\left(B_jV_i(a_2)-B_iV_j(a_2)\right) \quad (19)$$

Сложив (15) , (18) и (19),получим

$$\left(\omega_i^2-\omega_j^2\right)\left(mA_iA_j+J_\varphi B_iB_j+\rho F\int_0^l V_i(x)V_j(x)dx\right)=0$$

Отсюда получим условие ортогональности вида

$$mA_iA_j+J_\varphi B_iB_j+\rho F\int_0^l V_i(x)V_j(x)dx=0 \text{ при } i\neq j \quad (20)$$

Заключение

Таким образом, получено условие ортогональности (20), которое позволит определить указанные выше временные коэффициенты при собственных формах, получить разложение в ряд обобщенных координат твердого тела и смещений точек оси балки, и тем самым решить начально-краевую задачу.

Библиография

1. Баргуев С.Г., Мижидон А.Д., Цыцыренова М.Ж. Сравнительный анализ к расчету собственных частот колебаний стержня с упруго присоединенной системой с двумя степенями свободы // Материалы 5-ой Международной конференции «Проблемы механики современных машин». – Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2012. – Т. 1. – С. 186-189.

Bibliography

1. Barguev S.G., Mizhidon AD, Tsytsyrenova M.Zh. Comparative analysis to calculation of natural frequencies of rod oscillations with elastically connected system with two degrees of freedom//Materials of the 5th International Conference "Problems of Mechanics of Modern Machines." – Ulan-Ude: Publishing House of VSGUTU, 2012. – T. 1. – P. 186-189.

УДК 517.968.2

DOI 10.53980/9785907599970_23

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ИНТЕГРО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ОБА ПРЕДЕЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ КОТОРЫХ ПЕРЕМЕННЫЕ[1*]

Ботороева М.Н.*, Булатов М.В.**
**Иркутский государственный университет,*
Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН
Россия, Иркутск, masha888888@mail.ru
*** Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН,*
Россия, Иркутск, mvbul@icc.ru

В.М. Глушков и его последователи достаточно детально изучили возможности учета динамики отмирания или обновления элементов различных развивающихся систем при их моделировании с помощью интегральных уравнений Вольтерра первого и второго родов, нижний предел интегрирования в которых является неубывающей функцией. В цикле исследований авторов Ю.П. Яценко., А.С. Апарцина и др. были доказаны теоремы о разрешимости описанных уравнений. При рассмотрении достаточно сложных моделей, содержащих большое количество интегральных и алгебраических балансовых уравнений, их исследование становится весьма затруднительным. В связи с этим предлагается систему взаимосвязанных алгебраических и интегральных уравнений первого и второго рода с переменными пределами интегрирования исследовать в матричном виде, в виде интегроалгебраического уравнения.

Ключевые слова: *интегральные уравнения Вольтерра, интегро-алгебраические уравнения, переменные пределы интегрирования, численные методы решения.*

ABOUT NUMERICAL SOLUTION OF INTEGRAL ALGEBRAIC EQUATIONS WITH VARIABLE LIMITS OF INTEGRATION

Botoroeva M.N.*, Bulatov M.V.**
** Irkutsk State University,*
Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Russia, Irkutsk, masha888888@mail.ru
*** Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Russia, Irkutsk, mvbul@icc.ru*

V.M. Glushkov and his followers studied in sufficient detail the possibilities of taking into account the dynamics of the withering away or renewal of elements of various developing systems when modeling them using the Volterra integral equations of both the first and second kind, the lower limit of integration in which is a non-decreasing function. In the series of studies by the authors Yu.P Yatsenko., A.S. Apartsina and others, theorems on the solvability of the described equations were proved. When considering fairly complex models containing a large number of integral and algebraic balance equations, their study becomes very difficult. In this regard, it is proposed to study the system of interconnected algebraic and integral equations of the first and second kind with variable limits of integration in a matrix form, in the form of an integroalgebraic equation with variable limits of integration.

Key words*: Volterra integral equations, integral algebraic equations, variable limits of integration, methods of numerical solutions.*

Введение

Исследованию и численному решению неклассических интегральных уравнений Вольтерра (ИУВ) первого рода посвящена монография А.С. Апарцина [1], в которой также предлагаются схемы приближенного решения, основой которых является квадратурная формуле правых прямоугольников. Неклассическими уравнения названы из-за того, что нижний предел интегрирования является

[1*] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00173, https://rscf.ru/project/22-11-00173/

неубывающей функцией $a(t)$. Выделяются два основных случая: $a(t) = t - c$, $a(t) = bt$.

В [2] исследуется система, содержащая ИУВ первого и второго рода с переменными пределами интегрирования вида $a(t) = t - c$. Такие системы, по аналогии с уже устоявшейся терминологией (см., например, [3-5]), были названы интегроалгебраическими уравнениями (ИАУ) с переменными пределами интегрирования. Их численному решению посвящена публикация [6].

В докладе будут рассмотрены ИАУ с переменным нижним пределом вида $a(t) = bt$ и представлены численные методы их решения.

1. Постановка задачи

Интегроалгебраические уравнения с переменными пределами интегрирования могут быть представлены в матричном виде, как

$$A(t)x(t) + \int_{bt}^{t} K(t,s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

где $A(t),\ K(t,s) - (n \times n)$ матрицы, элементами которых являются заданные непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $t \in [0,1]$ и в области $\{(t,s) \in R^2 \mid bt \le s \le t\}$ соответственно, $f(t) - n$-мерная вектор-функция с заданными непрерывными на $t \in [0,1]$ элементами. Задана постоянная $0 \le b < 1$.

В силу присутствия в системе уравнения первого рода, главная часть которых равна нулю вытекают условия на матрицу главной части уравнения (1)

$$A(t) \ne \mathrm{O},\ \det A(t) = 0. \tag{2}$$

Следует отметить, что в упомянутых работах [3-5] рассматривались ИАУ с постоянным нижним пределом интегрирования $a(t) = 0$, которые являются частным случаем задачи (1) при $b = 0$. В первой работе [7], посвященной их исследованию приведен критерий оценки сложности таких задач, сформулированы условия существования непрерывного решения и его единственности, предложен метод численного решения, базирующийся на квадратуре правых прямоугольников.

Интегроалгебраические уравнения вида (1) с условием (2) имеют единственное непрерывное решение при выполнении ряда условий, которые будут представлены с подробными пояснениями в докладе.

2. Численные алгоритмы

Для поставленной задачи предлагаются численные методы решения, основанные на квадратурной формуле правых прямоугольников

$$A_i x_i + (n_i - bi)hK_{i,n_i}x_{n_i} + h\sum_{j=n_i+1}^{i} K_{i,j}x_i = f_i, \quad i = 1,2,...,N. \tag{3}$$

на равномерной сетке $t_i - ih,\ i = 1,2,...,N,\ h = \frac{1}{N}$.

Здесь приняты следующие обозначения: $A(t_i) = A_i,\ f(t_i) = f_i,\ K(t_i,t_j) = K_{i,j}, j \le i,\ x(t_i) \approx x_i$, $n_i = [ai] + 1, [ai]$ – целая часть числа ai.

В докладе будут описаны трудности, возникающие при численном решении поставленной задачи (1), (2) и продемонстрированы результаты расчетов модельных примеров с помощью построенного численного метода (3).

Заключение

Таким образом, в докладе будут представлены результаты исследования интегроалгебраических уравнений, нижний предел интегрирования которых не является постоянным, а имеет вид bt. Этот случай принципиально отличается от рассмотренного ранее $a(t) = t - c$. В терминах матричных пучков сформулированы условия существования непрерывного решения и его единственности. Построен метод численного решения. Численные эксперименты подтверждают, что метод (3) сходится к точному решению с первым порядком точности.

Библиография

1. *Апарцин А.С.* Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука. 1999. – 193 с.

2. *Bulatov M.V., Machkhina M.N., Phat V.N.* Existence and uniqueness of solutions to integral- algebraic equations with variable limits of integrations // Communications on applied nonlinear analysis. 2014. – Vol. 21. – No. 1 – P. 65-76.

3. *Hadizadeh M.* Jacobi spectral solution for integral algebraic equations of index-2 // Appl. Numer. Math. 2011. – Vol. 61. No. 1. – P. 131-148.

4. *Pishbin S.* The semi-explicit Volterra integral algebraic equations with weakly singular kernel: The numerical treatments // Journal of computational and applied mathematics. 2013. – Vol. 245. – No. 1 – P. 121-132.

5. *Hui Liang, H. Brunner* Integral-algebraic equations: theory of collocation methods // SIAM J. Numer. Anal. 2016. – Vol. 54. – P. 2640-2663.

6. *Ботороева М.Н., Булатов М.В.* Приложения и методы численного решения одного класса интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2017. – Т. 20. – С. 3-16.

7. Чистяков В.Ф. О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах // Функции Ляпунова и их применения. – Новосибирск: Наука, 1987. – С. 231-239.

Bibliography

1. *Apartsin A.S.* Neklassicheskiye uravneniya Vol'terra I roda: teoriya i chislennyye metody. [Non-classical Volterra equations of the first kind: theory and numerical methods] Novosibirsk: Nauka. 1999. – 193 c.

2. *Bulatov M.V., Machkhina M.N., Phat V.N.* Existence and uniqueness of solutions to integral- algebraic equations with variable limits of integrations // Communications on applied nonlinear analysis. 2014. – Vol. 21. – No. 1 – P. 65-76.

3. *Hadizadeh M.* Jacobi spectral solution for integral algebraic equations of index-2 // Appl. Numer. Math. 2011. – Vol. 61. No. 1. – P. 131-148.

4. *Pishbin S.* The semi-explicit Volterra integral algebraic equations with weakly singular kernel: The numerical treatments // Journal of computational and applied mathematics. 2013. – Vol. 245. – No. 1 – P. 121-132.

5. *Hui Liang, H. Brunner* Integral-algebraic equations: theory of collocation methods // SIAM J. Numer. Anal. 2016. – Vol. 54. – P. 2640-2663.

6. *Botoroyeva M.N., Bulatov M.V.* Prilozheniya i metody chislennogo resheniya odnogo klassa integro-algebraicheskikh uravneniy s peremennymi predelami integrirovaniya [Applications and methods for numerical solution of one class of integral algebraic equations with variable limits of integrathion]// Bulletin of the Irkutsk state university. Series Mathematiks. 2017. – T. 20. – C. 3-16.

7. Chistyakov V.F. O singulyarnyh sistemah obyknovennyh differencial'nyh uravnenii i ih integral'nyh analogah [On singular systems of ordinary differential equations and their integral analogues] // Lyapunov Functions and Their Applications. Novosibirsk: Nauka, 1987. – P. 231-239.

УДК 519.642.5

DOI 10.53980/9785907599970_26

О КОНСТРУИРОВАНИИ ДВУХСТАДИЙНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ [1*]

Будникова О.С.*, Булатов М.В.**
**Иркутский государственный университет,*
Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН
Россия, Иркутск, osbud@mail.ru
*** Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН*
Россия, Иркутск, mvbul@icc.ru

Доклад посвящен разработке двухстадийных многошаговых методов для приближенного решения интегро-алгебраических уравнений. Представлено несколько классов блочных алгоритмов, в зависимости от способа выбора узлов интегрирования. Проведен анализ алгоритмов на устойчивость, выписаны весовые коэффициенты квадратурных формул.

Ключевые слова: *интегральные уравнения Вольтерра, интегро-алгебраические уравнения, многошаговые методы, блочные методы.*

CONSTRUCTION TWO-STAGE METHODS FOR NUMERICAL SOLUTION OF INTEGRAL ALGEBRAIC EQUATIONS

Budnikova O.S.*, Bulatov M.V.**
** Irkutsk State University,*
Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Russia, Irkutsk, osbud@mail.ru
*** Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Russia, Irkutsk, mvbul@icc.ru*

The report is devoted of the construction two-stage multistep methods for numerical solution of integral algebraic equations. We present several classes of block methods. Stable two-stage methods identified and the weight coefficients of these algorithms are written.

Key words*: Volterra integral equations, integral algebraic equations, multistep methods, block methods.*

Введение и постановка задачи

Данная работа посвящена конструированию численных алгоритмов для интегроалгебраических уравнений (ИАУ) – системы взаимосвязанных интегральных уравнений Вольтера первого и второго рода, а также алгебраических уравнений с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью, которые принято записывать в следующей форме:

$$A(t)x(t)+\int_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t), \quad t\in[0,T], \tag{1}$$

здесь $A(t),\ K(t,s)-$ заданные $(n\times n)$ матрицы, $x(t),\ f(t)-$ неизвестная и заданная n-мерные вектор-функции. Предполагается, что элементы входных данных достаточно гладкие и $A(t)$ не нулевая тождественно вырожденная матрица:

$$A(t)\neq \mathrm{O},\ \det A(t)=0. \tag{2}$$

Системы вида (1) стали активно исследоваться в конце 80-х годов. Первая публикация была посвящена обоснованию достаточных условий существования единственного непрерывного решения ИАУ [1], а чуть позже вышла статья [2]. С тех пор опубликовано не более трех десятков работ по данной тематике, полный обзор можно посмотреть в недавних публикациях [3]-[5].

Классические многошаговые методы по нескольким стартовым значениям неизвестной функции

[1*] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00173, https://rscf.ru/project/22-11-00173/

$x_0, x_1, ..., x_k$ позволяют вычислить следующее значение x_{k+1}. В данной работе мы ставим задачу вычисления нескольких значений искомой вектор-функции по имеющимся стартовым значениям. Такие методы в теории численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений принято называть блочными [6]. В работе [7] блочные методы для численного решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода на основе квадратурной формулы Симпсона, а в монографии [8] отмечается, что неявные методы Рунге-Кутта можно записать в виде блочных.

Численные методы

Опишем идею конструирования блочных методов для численного решения ИАУ (1)-(2).

Зададим на отрезке $[0,T]$ равномерную сетку

$$t_i = ih,\ \ i = 0,1,2,...,N,\ \ h = \frac{T}{N},$$

и введем обозначения $A(t_i) = A_i,\ K(t_i,t_j) = K_{ij},\ f(t_i) = f_i$ и $x(t_i) \approx x_i$.

Поиск приближенного решения задачи (1)-(2) x_i и x_{i+1} в узлах сетки t_i и t_{i+1} будем осуществлять из следующей системы двух $(k+1)$-шаговых алгоритмов:

$$\begin{cases} A_{i+1}\sum\limits_{l=0}^{k+1}\alpha_l^1 x_{i+1-l} + h\sum\limits_{j=0}^{i+1}\omega_{i+1,j}^1 K_{i+1,j}x_j = f_{i+1}, \\ A_{i+2}\sum\limits_{l=0}^{k+1}\alpha_l^2 x_{i+2-l} + h\sum\limits_{j=0}^{i+2}\omega_{i+2,j}^1 K_{i+2,j}x_j = f_{i+2} \end{cases} \qquad (3)$$

Система (3) в целом является двухстадийным k-шаговым методом конкретный вид которого, как и его устойчивость, зависит выбора узлов интегрирования.

В докладе будут представлены более подробные пояснения о способе конструирования блочных алгоритмов для рассматриваемого класса задач, а здесь приведем три варианта двухстадийных нольшаговых методов с кратким описанием.

1 вариант (экстраполяционный). Веса квадратурной формулы выбираются так, чтобы система (3) была не доопределенной относительно трех неизвестных значений x_i, x_{i+1} и x_{i+2}, а затем применяется специальная экстраполяция:

$$\begin{pmatrix} A_{2m+1} + \frac{h}{2}K_{2m+1,2m+1} & \frac{h}{2}K_{2m+1,2m} \\ 2A_{2m+2} + 2hK_{2m+2,2m+1} & -A_{2m+2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{2m+1} \\ x_{2m} \end{pmatrix} + 2h\sum_{j=0}^{m-1}\begin{pmatrix} K_{2m+1,2j+1} & 0 \\ K_{2m+2,2j+1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{2j+1} \\ x_{2j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{2m+1} \\ f_{2m+2} \end{pmatrix},\ m = 0,1,2,...$$

2 вариант. Веса квадратурной формулы выбираются так, что один из методов в системе (3) – есть одношаговый метод с забеганием вперед:

$$\begin{pmatrix} -\frac{h}{2}K_{2m-1,2m} & A_{2m-1} + \frac{3}{2}hK_{2m-1,2m-1} \\ A_{2m} & 2hK_{2m,2m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{2m} \\ x_{2m-1} \end{pmatrix} + 2h\sum_{j=1}^{m-1}\begin{pmatrix} 0 & K_{2m-1,2j-1} \\ 0 & K_{2m,2l-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{2j} \\ x_{2j-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{2m-1} \\ f_{2m} \end{pmatrix},\ m = 1,2,...$$

3 вариант. Веса квадратурной формулы выбираются так, что один из методов каждый из методов в системе (3) – есть одношаговый неявный метод со стартовым значением x_1:

$$\begin{pmatrix} A_{2m} + \frac{h}{2}K_{2m,2m} & \frac{h}{2}K_{2m,2m-1} \\ 2A_{2m+1} + 2hK_{2m+1,2m} & -A_{2m+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{2m} \\ x_{2m-1} \end{pmatrix} + 2h\sum_{j=2}^{m-1}\begin{pmatrix} K_{2m,2j} & 0 \\ K_{2m+1,2j-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{2j} \\ x_{2j-1} \end{pmatrix} +$$
$$+\frac{3}{2}h\begin{pmatrix} K_{2m,2} & K_{2m,1} \\ K_{2m+1,2} & K_{2m+1,1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{2m} \\ f_{2m+1} \end{pmatrix},\ m = 2,3,...$$

Заключение

В работе обсуждаются несколько вариантов построения двухстадийных многошаговых методов для численного решения ИАУ. В качестве иллюстрации представлены варианты нольшаговых двухстадийных методов. Проведен анализ методов на устойчивость, выписаны в явном виде веса квадратурных формул для устойчивых методов. Проведено сравнение этих методов на различных тестовых ИАУ, представлены результаты численных расчетов.

Библиография

1. *Чистяков В.Ф.* О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах // Функции Ляпунова и их применения. – Новосибирск: Наука, 1987. – С. 231-239.
2. *Gear C.W.* Differential-algebraic equations, indices, and integral algebraic equations // SIAM J. on Numer.Anal., 1990. – V.27. – № 6. – P. 1527-1537.
3. *Ботороева М.Н., Будникова О.С., Булатов М.В., Орлов С.С.* Численное решение интегроалгебраических уравнений со слабой граничной особенностью k-шаговыми методами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2021. – Т.61. – № 11. – С. 1825-1838.
4. *Будникова О.С., Ботороева М.Н., Соколова Г.К.* Построение областей устойчивости неявного метода для численного решения интегро-алгебраического уравнения типа Абеля //Сиб. журн. вычисл. матем., 2023. – Т.26. – № 1. – С. 1-16.
5. *Darania P., Pishbin S.* Multistep collocation methods for integral-algebraic equations with non-vanishing delays // Mathematics and Computers in Simulation, 2023. – V.205. – P. 33-61.
6. *Булатов М.В., Линь В.Х., Соловарова Л.С.* О блочных разностных схемах высокого порядка для жестких линейных дифференциально-алгебраических уравнений // Ж. вычисл.матем. и матем. физ., 2019. – Т.59. – № 7. – С. 1100-1107.
7. *Linz P.* Analytical and numerical methods for Volterra Equations. Philadelphia: SIAM, 1985. – 227 p.
8. *Brunner H., van der Houwen P.J.* The numerical solution of Volterra Equations. Centre for Mathematics and Computer Science. North-Holland, 1986. – 588 p.

Bibliography

1. *Chistyakov V.F.* O singulyarnyh sistemah obyknovennyh differencial’nyh uravnenii i ih integral’nyh analogah [On singular systems of ordinary differential equations and their integral analogues] // Lyapunov Functions and Their Applications. – Novosibirsk: Nauka, 1987. – P. 231-239.
2. *Gear C.W.* Differential-algebraic equations, indices, and integral algebraic equations // SIAM J. on Numer.Anal., 1990. – V.27. – № 6. – P. 1527-1537.
3. *Botoroeva M.N., Budnikova O.S., Bulatov M.V., Orlov S.S.* Numerical solution of integral-algebraic equations with a weak boundary singularity by k-step methods// Comput. Math. and Math. Phys. 2021. – Vol. 61. – P. 1787-1799.
4. *Budnikova O.S., Botoroeva M.N., Sokolova G.K.* Stability domains of an implicit method for numerical solution of Abel type integral algebraic equations// Sib. Zh. Vychisl. Mat., 2023. – Vol. 26. – Iss. 1. – P. 1-16.
5. *Darania P., Pishbin S.* Multistep collocation methods for integral-algebraic equations with non-vanishing delays // Mathematics and Computers in Simulation, 2023. – V.205. – P. 33-61.
6. Bulatov M.V., Solovarova L.S., Linh V.H. Block difference schemes of high order for stiff linear differential-algebraic equations // Comput. Math. and Math. Phys. 2019. – Vol. 59. – № 7. – P. 1049-1057.
7. *Linz P.* Analytical and numerical methods for Volterra Equations. Philadelphia: SIAM, 1985. – 227 p.
8. *Brunner H., van der Houwen P.J.* The numerical solution of Volterra Equations. Centre for Mathematics and Computer Science. North-Holland, 1986. – 588 p.

УДК 519.642

DOI 10.53980/9785907599970_29

О МЕТОДАХ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ[1*]

Булатов М.В.*

** Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, Россия, Иркутск, mvbul@icc.ru*

В докладе рассмотрены системы линейных интегральных уравнений Вольтерра с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью. Подчеркнуты принципиальные отличия рассматриваемых систем от стандартных интегральных уравнений. Для выделенного класса таких задач, имеющих единственное решение, описаны подходы к созданию приближенных методов их решения.

Ключевые слова: *интегро-алгебраические уравнения, квадратурные формулы, интегральные уравнения Вольтерра, численные методы.*

ON THE METHODS OF THE NUMERICAL SOLUTION FOR INTEGRAL-ALGEBRAIC EQUATIONS

Bulatov M.V.*

**Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Russia, Irkutsk mvbul@icc.ru*

The report addresses systems of linear Volterra integral equations with an identically degenerate matrix in front of the main part. The fundamental differences between the systems under consideration and standard integral equations are emphasized. For a selected class of such problems with a unique solution, approaches to the construction of approximate methods for their solution are described.

Key words*: integral-algebraic equations, quadrature formulas, Volterra integral equations, numerical methods.*

Введение

Рассмотрим систему линейных интегральных уравнений Вольтерра вида

$$A(t)x(t) + \int_0^t K(t,\tau)x(\tau) = f(t), \qquad 0 \le \tau \le t \le 1, \tag{1}$$

где $A(t)$ и $K(t,\tau)$ – заданные $(n \times n)$-матрицы, $f(t)$ и $x(t)$ – известная и искомая n-мерные вектор-функции. Будем также предполагать, что входные данные обладают той гладкостью, которая необходима для проведения всех выкладок.

Принята следующая классификация систем (1):

Если $\det A(t) \neq 0 \ \forall t \in [0,1]$, то их называют системами второго рода;

Если $A(t)$ тождественно нулевая матрица, то системами первого рода;

Если $\det A(t_i) = 0$ в точках $t_j \in [0,1]$, то системами третьего рода. Точки t_j называют при этом сингулярными.

В докладе рассмотрен случай, когда

$$\det A(t) \equiv 0. \tag{2}$$

Такие системы, продолжая классификацию, естественно называть системами четвертого рода [1],[2], но к настоящему времени их называют интегро-алгебраическми уравнениями (ИАУ). Если $n = 1$, то (1) с условием (2) означает, что мы имеем интегральное уравнение первого рода. Отмечено, что рассматриваемые задачи относятся к классу некорректных, то есть решение ИАУ может не существовать (в классе достаточно гладких функций), ИАУ может иметь множество решений, решение неустойчиво к возмущению входных данных. В докладе приведены соответствующие иллюстративные примеры.

[1*] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00173.

Для ИАУ приведено понятие индекса, которое характеризует сложность их исследования на предмет существования и единственности решения и создания для них численных алгоритмов. Для $n=1$ это понятие совпадает с определением степени неустойчивости [3, стр.14].

2. Основная часть

Относительно существования единственного решения ИАУ справедлив следующий результат.

Теорема 1 ([4]). Пусть для ИАУ (1) выполнены условия:

элементы $A(t)$, $K(t,\tau)$, $f(t)$ – непрерывно-дифференцируемые функции;

$rankA(t) = l = const$;

$rankA(0) = rank\{A(0)|f(0)\}$;

$\det(\lambda A(t) + K(t,t)) = a_0(t)\lambda^l + a_1(t)\lambda^{l-1} + ... + a_l$, где λ – скалярный параметр, а функция $a_0(t) \neq 0$ $\forall t \in [0,1]$.

Тогда исходное ИАУ имеет единственное непрерывное решение.

Для интегральных уравнений Вольтерра первого данная теорема означает случай (см., напр., [3]): $K(t,\tau) \neq 0$ $\forall t \in [0,1]$ и $f(0) = 0$. ИАУ, для которых выполнено условие теоремы, имеют индекс один.

Подчеркнуты принципиальные трудности создания численных методов решения ИАУ, например, после дискретизации исходной задачи можно получить неустойчивые процессы. Приведем простой пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \tau \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix},$$

где α – скалярный параметр. Если $\alpha \neq -1$, $f_2(0) = 0$, $f_1(t), f_2(t) \in C^1$, то данное ИАУ имеет единственное решение. Если для численного решения данного примера применить метод, основанный на квадратурной формуле правых прямоугольников

$$A_{i+1}x_{i+1} + h\sum_{j=1}^{i+1} K_{i+1,j}x_j = f_i,$$

то при $|\alpha| < 1$ получим неустойчивый процесс, а при $\alpha = 0$ получим тождественно вырожденную систему линейных алгебраических уравнений относительно x_{i+1}. Данный пример имеет индекс два.

В докладе представлены подходы к численному решению ИАУ индекса один:

методы регуляризации;
коллокационные методы;
применение различных полиномов;
многошаговые методы;
коллокационно-вариационный подход.

Заключение

В заключении автор отмечает, что наиболее перспективными направлениями численного решения ИАУ, на его взгляд, являются разработка коллокационно-вариационных методов и методов блочного типа.

Библиография

1. *Булатов М.В.*. О нелинейных системах интегральных уравнений четвертого рода // Труды 11-й Байкальской Международной Школы-Семинара «Методы оптимизации и их приложения», 5-12 июля 1998, Иркутск, Байкал. 1998. – Т.4.– С. 68-71.

2. *Bulatov M.V., Chistyakov V.F.* The properties of differential-algebraic systems and their integral analogs. Preprint. September. Memorial University of Newfoundland, 1997. – 35 p.

3. *Апарцин А.С.* Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1999. – 193 с

4. *Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск: Наука, 1996. – 278 с.

Bibliography

1. *Bulatov M.V.* O nelinejnyh sistemah integral'nyh uravnenij chetvertogo roda [On nonlinear systems of integral equations of the fourth kind] // Proceedings of the 11th Baikal International School-Seminar "Optimization methods and their applications", July 5-12, 1998, Irkutsk, Baikal. 1998. – Vol.4. – P. 68-71.

2. *Bulatov M.V., Chistyakov V.F.* The properties of differential-algebraic systems and their integral analogs. Preprint. September. Memorial University of Newfoundland, 1997. – 35 p.

3. *Apartsyn A.S.* Nonclassical Linear Volterra Equations of the First Kind. VSP, Utrecht, 2003. –168 p.

4. *Chistyakov V.F.* Algebro-differentsial'nye operatory s konechnomernym yadrom[Algebraic Differential Operators with a Finite-Dimensional Kernel.]. – Novosibirsk: Nauka, 1996. –278 p.

УДК 517.91

DOI 10.53980/9785907599970_32

О РАЗРЕШИМОСТИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ[1]

Булатов М.В.*, Соловарова Л.С.*

** Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, Россия, Иркутск, mvbul@icc.ru, soleilu@mail.ru*

В докладе рассмотрены квазилинейные системы интегральных уравнений: линейные относительно главной части и нелинейные относительно интегрального слагаемого. В отличие от стандартного случая исследованы системы с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью, которые называются интегро-алгебраическими уравнениями. В терминах матричных пучков сформулированы достаточные условия локального существования единственного гладкого решения. Также приведены некоторые демонстративные примеры.

Ключевые слова: *интегральные уравнения Вольтерра, системы интегральных уравнений, интегро-алгебраические уравнения, матричные пучки, квазилинейные задачи, условия существования решения, разрешимость.*

ON SOLVABILITY OF QUASILINEAR INTEGRAL-ALGEBRAIC EQUATIONS

Bulatov M.V.*, Solovarova L.S.*

**Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Russia, Irkutsk mvbul@icc.ru, soleilu@mail.ru*

The report addresses quasi-linear systems of integral equations: linear with respect to the main part and nonlinear with respect to the integral term. In contrast to the standard case, systems with an identically degenerate matrix in front of the main part, which are called integral-algebraic equations, are studied. Sufficient conditions for the local existence of a unique smooth solution are formulated in terms of matrix pencils. Also some demonstrative examples are given.

Key words*: Volterra integral equations, systems of integral equations, integral-algebraic equations, matrix pencils, quasilinear problems, conditions for the existence of a solution, solvability.*

Введение

Доклад посвящен исследованию на предмет существования единственного непрерывно-дифференцируемого решения систем интегральных уравнений Вольтерра вида

$$A(t)x(t) + \int_0^t K(t,\tau,x(\tau))d\tau = f(t), \qquad 0 \le \tau \le t \le 1, \tag{1}$$

в окрестности начальной точки $t \in [0,\alpha]$. Здесь и всюду в дальнейшем изложении $A(t)$ – заданная $(n \times n)$-матрица, $K(.): R^{n+2} \to R^n$, $f(t)$ и $x(t)$ – заданная и искомая n-мерные вектор-функции. Будем также предполагать, что матрица $A(t)$ тождественно вырожденная и элементы входных данных обладают той гладкостью, которая необходима для проведения всех последующих выкладок.

К настоящему времени систему (1), как правило, называют интегро-алгебраическими уравнениями (ИАУ). В докладе подчеркнуты принципиальные отличия данных задач от систем интегральных уравнений второго рода.

В первой статье [1], посвященной линейным интегро-алгебраических уравнений, сформулированы достаточные условия существования единственного решения таких уравнений и предложен метод приближенного решения, основанный на квадратурной формуле правых прямоугольников. С той поры вышло немного работ, посвященной данной тематике. Библиографию можно найти, например, в статьях [2],[3]. Более ранние работы посвящены линейным задачам. Что же касается квазилинейных интегро-алгебраических уравнений (и нелинейных), то такие исследования, насколько известно авторам, практически не проводились. Это и послужило мотивацией изучению поставленных задач.

[1*] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00173.

Основные определения и результаты

Приведем известные определения из теории матричных пучков.

Определение 1[4]**.** Выражение вида $\lambda A + B$, где λ – скалярный параметр, A, B – матрицы размера $(m \times n)$, называют матричным пучком. Если $m = n$ и $\det(\lambda A + B)$ тождественно не равен нулю, то пучок матриц $\lambda A + B$ называется регулярным. В противном случае ($m \neq n$ или $\det(\lambda A + B) = 0$) пучок называется сингулярным.

Определение 2[5]**.** Индексом матричного пучка называется минимальное натуральное число r, при котором выполнено равенство

$$rank[(\lambda A + B)^{-1} A]^{r+1} = rank[(\lambda A + B)^{-1} A]^{r}.$$

Пучки индекса один также называют пучками, удовлетворяющими критерию "`ранг-степень"' (см., напр., [6] и приведенный там исторический обзор по данному вопросу). В этом случае для переменных матриц $A(t)$, $B(t)$, заданных на отрезке $[0,1]$ выполнены условия: $rankA(t) = l = const$ и $\det(\lambda A(t) + B(t)) = a_0(t)\lambda^l + a_1(t)\lambda^{l-1} + ... + a_l$, где $a_0(t) \neq 0 \ \forall t \in [0,1]$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. (см., напр. [1],[6]). Если матричный пучок $\lambda A(t) + B(t)$ удовлетворяет критерию "ранг-степень"' на отрезке $[0,1]$ и элементы $A(t)$, $B(t)$ принадлежат $C^m_{[0,1]}$, то существуют невырожденные $(n \times n)$-матрицы $P(t)$, $Q(t)$ на $t \in [0,1]$ с элементами из $C^m_{[0,1]}$:

$$P(t)(\lambda A(t) + B(t))Q(t) = \lambda \begin{pmatrix} E_l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(t) & 0 \\ 0 & E_{n-l} \end{pmatrix},$$

где $J(t)$ _ $(l \times l)$-матрица, E_p – единичная матрица размерности p.

Лемма 2 ([7],[8]). Если матрицы $A(t)$, $B(t)$ имеют блочный вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \ B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix},$$

где $A_1(t)$, $B_1(t)$ _ $(l \times n)$-матрицы, $B_2(t)$ _ $((n-l) \times l)$-матрица и пучок $\lambda A(t) + B(t)$ удовлетворяет критерию "`ранг-степень" на отрезке $[0,1]$, то

$$\det = \begin{pmatrix} A_1(t) \\ cB_2(t) \end{pmatrix} \neq 0$$

$\forall t \in [0,1]$ и любого скаляра $c \neq 0$.

На основе вышеперечисленных лемм и результатов монографии [6, гл.4] сформулированы достаточные условия существования единственного решения для рассматриваемых задач. Приведены иллюстративные примеры.

Заключение

Итак, для квазилинейных интегро-алгебраических уравнений в окрестности начальной точки были сформулированы достаточные условия существования единственного решения. В дальнейшем планируется исследовать аналогичные задачи, но со слабой особенностью в ядре. Отдельный интерес представляет создание и обоснование сходимости численных методов решения подобного типа уравнений, основанных, в том числе, на квадратурной формуле правых или левых прямоугольников.

Библиография

1. *Чистяков В.Ф.* О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах // Функция Ляпунова и их применения. – Новосибирск: Наука, 1987. – С. 231-239.

2. *Hadizadeh M., Ghoreishi F., Pishbin S.* Jacobi spectral solution for integral-algebraic equations of index-2. // Appl. Numer. Math. 2011. – Vol. 61, issue 1. – P. 131–148.

3. *Будникова О.С., Булатов М.В.* Численное решение интегро-алгебраических уравнений многошаговыми методами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. – Т.52, № 5. – С. 829–839.

4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

5. Бояринцев Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1980. – 222 с.

6. *Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. – Новосибирск: Наука, 1996. – 278 с.

7. Булатов М.В. О преобразовании алгебро дифференциальных систем уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. –Т. 34, № 3. – С. 360–372.

8. *Булатов М.В.* Понижение индекса и численное решение неявных систем обыкновенных дифференциальных уравнений: дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.07. – Иркутск, 1989. – 100 с.

Bibliography

1. *Chistyakov V.F.* O singuljarnyh sistemah obyknovennyh differencial'nyh uravnenij i ih integral'nyh analogah [On Singular Systems of Ordinary Differential Equations and Their Integrals Analogues]. Lyapunov Functions and Applications. – Novosibirsk: Nauka, 1987. – P. 231–239.

2. *Hadizadeh M., Ghoreishi F., Pishbin S.* Jacobi spectral solution for integral-algebraic equations of index-2. // Appl. Numer. Math. 2011. – Vol. 61, issue 1. – P.131–148.

3. *Budnikova O.S., Bulatov M.V.* Numerical Solution of Integral-Algebraic Equations of Multistep Methods// Comput. Math. Math. Phys. 2012. – Vol. 52, issue 5. – P. 691–701.

4. *Gantmacher F.* The Theory of Matrices. New York, Chelsea Publishing Company, 1959. – 337 p.

5. *Boyarintsev Yu.E.* Reguljarnye i singuljarnye sistemy linejnyh obyknovennyh differencial'nyh uravnenij [Regular and Singular Systems of Linear Ordinary Differential Equations.]. – Novosibirsk: Nauka, 1980. – 222 p.

6. *Chistyakov V.F.* Algebro-differentsial’nye operatory s konechnomernym yadrom[Algebraic Differential Operators with a Finite-Dimensional Kernel.] Novosibirsk, Nauka, 1996. –278 p.

7. *Bulatov M.V.* Transformation of algebro-differential systems of equations // Comput. Math. Math. Phys. 1994. – Vol. 34, issue 3. – pp. 301–311

8. *Bulatov M.V.* Ponizhenie indeksa i chislennoe reshenie nejavnyh sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij [Index reduction and numerical solution of implicit systems of ordinary differential equations.] Dis. … cand. Phys.-Math. Sciences: 01.01.07. – Irkutsk, 1989. – 100 p.

УДК 519.64

DOI 10.53980/9785907599970_35

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ УЗЛОВ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ

Булгатова Е.Н.*, Павлова Е.Н., Елтошкина Е.В.*****

**Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Россия, Улан-Удэ, belena77@mail.ru*

***Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Россия, Улан-Удэ, pavlova2607@mail.ru*

**** Иркутский государственный аграрный университет имени А.А. Ежевского, Россия, Иркутск, eev_baikal2005@mail.ru*

В работе исследуются квадратурные весовые формулы. Сформулирована теорема, которая дает неявное выражение функции для определения оптимального распределения узлов. Приводятся результаты вычисления интегралов по полученным формулам.

Ключевые слова: *квадратурная формула, весовая квадратурная формула, оптимальное распределение узлов.*

OPTIMAL DISTRIBUTION OF NODES OF THE QUADRATURE FORMULA

Bulgatova E.N.*, Pavlova E.N., Eltoshkina E.V.*****

*East Siberian State University of Technology and Management, Russia, Ulan-Ude,

**East Siberian State University of Technology and Management, Ulan-Ude, Russia,

*** Irkutsk State Agrarian University named after A.A. Yezhevsky, Russia, Irkutsk,

The paper investigates quadrature weight formulas. A theorem is formulated that gives an implicit expression of the function for determining the optimal distribution of nodes. The results of the calculation of integrals by the obtained formulas are given.

Keywords: *quadrature formula, weight quadrature formula, optimal node distribution.*

Пусть име.тся формулы для вычисления интеграла $\int_0^1 g(x)\, f(x)\, dx$, где вес $g(x) \in L_{p'}, 1 < p \le \infty$, $f \in W_p^m$, $g(x) = x^s, -1 < s < 1$. Построим весовую формулу для $s = -\frac{1}{2}$ и $m = 2$.

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_0^h x^{-\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_h^{2h} x^{-\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{2h}^{3h} x^{-\frac{1}{2}} f(x)dx + \cdots + \int_{(N-2)h}^{(N-1)h} x^{-\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{(N-1)h}^{Nh} x^{-\frac{1}{2}} f(x)dx \quad (1)$$

Интегралы, стоящие в сумме равенства (1) вычислим по формуле

$$\int_{h\beta}^{h\beta+h} x^{-\frac{1}{2}} f(x)\, dx \cong h \sum_{\gamma=0}^{2} C_\gamma(\beta)\, f(h\gamma + h\beta), \quad (2)$$

коэффициенты $C_\gamma(\beta)$ определяются из уравнений

$$\int_0^1 (xh + \beta h)^{-\frac{1}{2}} x^\alpha dx = \sum_{\gamma=0}^{2} C_\gamma(\beta)\gamma^\alpha,\ \alpha = 0,1,2,\ \beta = 0,1,\ldots,N-1.$$

Подставим вместо интегралов в равенстве (1) их выражения по формуле (2):

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} f(x)\,dx \approx h\Big[C_0(0)\,f(0)+\big(C_1(0)+C_0(1)\big)\,f(h)+\big(C_2(0)+C_1(1)+C_0(2)\big)\,f(2h)+$$
$$+\big(C_2(1)+C_1(2)+C_0(3)\big)\,f(3h)+\big(C_2(2)+C_1(3)+C_0(4)\big)\,f(4h)+\ldots$$
$$+\big(C_2(N-4)+C_1(N-3)+C_0(N-2)\big)\,f\big((N-2)h\big)+$$
$$+\big(C_2(N-3)+C_1(N-2)+C_0(N-1)\big)\,f\big((N-1)h\big)+$$
$$+\big(C_2(N-2)+C_1(N-1)\big)\,f(Nh)+C_2(N-1)\,f\big((N+1)h\big)\Big] \qquad (3)$$

Перейдем к весовой квадратурной формуле с оптимальным распределением узлов.

Теорема. *Пусть* $f\in W_\infty^m$, $\max\limits_{x\in[0,1]}\left|f^{(m+1)}(x)\right|\le M$, $g(x)\in L_1(0,1)$ *и*

$$\int_0^1 g(x)\,f(x)\,dx \approx \sum_{\beta=1}^{N}\sum_{\gamma=0}^{m} C_\gamma(\beta)\,f\left(x_{\beta-1+\gamma}\right) \text{ - } \textit{весовая формула.} \qquad (4)$$

Тогда асимптотически оптимальное распределение узлов $x_\beta, \beta=1,2,...,N$, *определяется функцией* $x=\varphi(t)$, *удовлетворяющей дифференциальному уравнению*

$$\frac{d}{dt}\Big[g\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)^{m+1}\Big]=0, \qquad (5)$$

начальным условиям $\varphi(0)=0,\varphi(1)=1$ *и в неявной форме выражается интегралом* $\int_0^x g(x)^{\frac{1}{m+1}}\,dx=\int_0^x g(x)^{\frac{1}{m+1}}\,dx\cdot t$.

Для $g(x)=x^s,\ -1<s<1$ уравнение (5) имеет выражение

$$\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{1}{\big(t'(\varphi)\big)^{m+1}}\varphi^s\right]=0. \qquad (6)$$

Найдем частное решение уравнения (6)

$$x=t^{\frac{m+1}{m+s+1}}. \qquad (7)$$

Следовательно, узлы, соответствующие оптимальному распределению, определяются точками точкам

$$x_\beta=\left(\frac{\beta}{N}\right)^{\frac{m+1}{m+s+1}}, \beta=0,1,...,N-1. \qquad (8)$$

Вычислим интеграл $\int_0^1 x^s f(x)\,dx, -1<s<1$ и $f(0)\ne 0$. Представим данный интеграл в виде

$$\int_0^1 x^s\varphi(x)\,dx=\sum_{\beta=1}^{N}\int_{x_{\beta-1}}^{x_\beta} x^s\varphi(x)\,dx. \qquad (9)$$

где $\left[x_{\beta-1},x_\beta\right]$ - частичные отрезки, $\beta=1,2,...,N-1, x_0=0, x_N=1.$

Слагаемые из суммы равенства (9) определим по формуле

$$\int_{x_{\beta-1}}^{x_\beta} x^s\varphi(x)\,dx\approx h^*\sum_{\gamma=0}^{m} C_\gamma(\beta)\varphi\left(x_{\beta-1+\gamma}\right), \qquad (10)$$

где $h^*=x_\beta-x_{\beta-1}$ и коэффициенты, являются решениями уравнений

$$\int_0^1\left(x_{\beta-1}+h^*x\right)^s x^\alpha dx=\sum_{\gamma=0}^{m} C_\gamma(\beta)\left(x_{\beta-1+\gamma}\right)^\alpha, \alpha=0,1,...,m, \beta=0,1,...,N-1. \qquad (11)$$

Тогда

$$\int_0^1 x^s \varphi(x)\,dx \approx h^* \sum_{\gamma=0}^{m} C_\gamma(\beta)\,\varphi\left(x_{\beta-1+\gamma}\right). \qquad (12)$$

Теперь составим весовую квадратурную формулу для $g(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ и $m = 2$

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} f(x)\,dx \approx \sum_{\beta=1}^{N}\left((\beta h)^{\frac{6}{5}} - \left((\beta-1)h\right)^{\frac{6}{5}}\right)\sum_{\gamma=0}^{2} C_\gamma(\beta)\, f\left(\left((\beta-1+\gamma)h\right)^{\frac{6}{5}}\right), \qquad (13)$$

где коэффициенты $C_\gamma(\beta)$ найдем из уравнений

$$\int_0^1 \left(\left((\beta-1)h\right)^{\frac{6}{5}} + \left((\beta h)^{\frac{6}{5}} - \left((\beta-1)h\right)^{\frac{6}{5}}\right)x\right)^{-\frac{1}{2}} x^\alpha dx = \sum_{\gamma=0}^{2} C_\gamma(\beta)\left((\beta-1+\gamma)h\right)^{\frac{6\alpha}{5}},$$

$\alpha = 0,1,2, \beta = 1,2,\ldots,N, h = \frac{1}{N}$.

В таблице 1 приведены результаты вычислений по формулам (3) и (13).

Таблица 1

$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} x^3 dx$		
h	формула (3)	формула (13)
0,1	0,2852387161 погрешность: 0,0004755696	0,2852651592 погрешность: 0,0004491265
0,01	0,2857137933 погрешность: 0,0000004924	0,2857138512 погрешность: 0,0000004345

Библиография

1. *Шойнжуров Ц.Б.* Оценка нормы функционала погрешности кубатурных формул в различных функциональных пространствах. – Улан-Удэ: Изд-во Бурятского научного центра СО РАН, 2005. – 247 с.

2. *Половинкин В.И.* Весовые кубатурные формулы // Докл. АНСССР – 1968. – Т. 179, №4. – С. 542-544.

Bibliography

1. *Shoinzhurov Ts.B.* Estimation of the error functional norm of cubature formulas in various functional spaces. – Ulan-Ude: Publishing house of the Buryat Scientific Center SB RAS, 2005. – 247 p.

2. *Polovinkin V.I.* Weight cubature formulas // Dokl. ANSSR – 1968. – Vol. 179, No. 4. – P. 542-544.

УДК 519.716

DOI 10.53980/9785907599970_38

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ МУЛЬТИФУНКЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ МАКСИМАЛЬНЫМИ МУЛЬТИКЛОНАМИ[1*]

Булгытов Е.Б., Шаранхаев И.К.
Бурятский государственный университет, Россия, Улан-Удэ
ebulgytov@yandex.ru, goran5@mail.ru

В настоящей работе рассматривается разбиение множества мультифункций размерности 3 на классы эквивалентности относительно принадлежности максимальным мультиклонам ранга 2. Оно проводится на основе максимальных мультиклонов ранга 2 (15 классов), которые описал В. И. Пантелеев. Демонстрируются сведения о мультифункциях размерности 3, полученные с помощью компьютерного анализа. Это количество классов эквивалентности для них, а также примеры функций и характеристических векторов для этих классов.

Ключевые слова: *мультифункции, гиперфункции, частичные функции, мультиклон, суперпозиция.*

ON SOME CLASSES OF MULTIFUNCTIONS GENERATED BY MAXIMUM MULTICLONES

BulgytovE.B., SharankhaevI.K.
Buryat State University, Russia, Ulan-Ude
ebulgytov@yandex.ru, goran5@mail.ru

In the following paper, we consider the partition of the set of 3-dimensional multifunctions into equivalence classes based on whether the belong to the maximum multiclones of rank 2. The partition carried out is basedon the maximum multiclones of rank 2 (15 classes), which were described by V. I. Panteleev. We demonstrate the information about 3-dimensional multifunctions obtained by computer analysis. This includes the number of equivalence classes for them, as well as examples of functions and characteristic vectors for these classes.

Key words*: multifunctions,hyperfunctions, partial functions, multiclone, superposition.*

Введение

В настоящее время в теории функций многозначной логики активно исследуется подмножества функций2^k-значной логики, которые называют мультифункциями.В своей работе [1] Пантелеев В. И. полностью описал 15 максимальных мультиклонов ранга 2, что дало возможность доказательства критерия полноты системы мультифункций ранга 2. На основеэтого возникает задача классификации всех мультифункций путем проверки принадлежности их описанным максимальным мультиклонам. Решив эту задачу, мы могли бы составить описание всех типов базисов мультифункций.

В задаче классификации мультифункций можно выделить подзадачи – проверку различных подмножеств множества всех мультифункций.Подобные задачи обладают меньшим объемом и сложностью и помогают в решении общей задачи.Можно разделять мультифункции по типу самих функций: булевы функции (рассматриваются в работе [2]), гиперфункции (рассматриваются в работе [3]) и частичные функции. Другой способ классификации – по размерности функции; функции размерности 2, 3, 4 и т.д.

В данной работе рассматриваются мультифункции размерности 3 и классы эквивалентности, составленные на основе принадлежности этих функций тем или иным максимальным мультиклонам ранга 2. Данные получены с помощью компьютерного анализа.

1. Постановка задачи

Назовем мультифункциями на A функции вида $f: A \to B$, где

$$A = \{0,1\}, B = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}.$$

Обозначим множество всех мультифункций на A как P^*. Также дадим обозначения его

[1*]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №22–21–20013, https://rscf.ru/project/22-21-20013/ и Правительства Республики Бурятия.

подмножествам: P^* - множество частичных функций на A, P^- - множество гиперфункций на A,P - множество булевых функций.

Чтобы с помощью суперпозиции

$$f\big(f_1(x_1,\dots,x_m),\dots,f_n(x_1,\dots,x_m)\big),$$

в которой функции $f, f_1,\dots,f_n$ принадлежат множеству P_2^*, определялась мультифункция $g(x_1,\dots,x_m)$, будем определять значения мультифункции f так: если $(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\in A^m$, то

$$g(\alpha_1,\dots,\alpha_m)=\bigcup_{(\beta_1,\dots,\beta_n)} f(\beta_1,\dots,\beta_n).$$

Объединение по различным наборам $(\beta_1,\dots,\beta_n)$производится следующим образом:

$$\beta_i\in f_i(\alpha_1,\dots,\alpha_m), i\in\{1,\dots,n\}.$$

И при этом, если в каком-либо наборе есть $\emptyset$, то значение мультифункции на нем тоже считается равным $\emptyset$.

В работе [1] имеется полное описание 15 максимальных мультиклонов ранга 2. На основе их описания для каждой мультифункции можно составить характеристический вектор длиной 15. Он будет показывать, принадлежит ли функции тому или иному мультиклону из всех 15 (как правило, принадлежит или не принадлежит обозначается через 0 и 1 соответственно).

Возникает вопрос, какие классы эквивалентности с уникальными характеристическими векторами могут существовать для мультифункций и сколько их всего? Эта задача решается двумя способами: ограничение числа векторов сверху(как правило, анализ закономерностей и исключение невозможных векторов) и снизу (как правило, перебор функций и запоминание найденных векторов).

2. Результаты

Для перебора мультифункций размерности 3 была составлена программа на языке программирования C++, которая поочередно проходит по мультифункциям заданной размерности (основные – 3 и 4) и в заданном промежутке. Программа проверяет каждую из этих функций на принадлежность к 15 максимальным мультиклонам. Основная часть работы – это проверка на то, сохраняет ли функция предикаты, на основе которых определяются классы 7-15 (см. работу [1]).

С помощью этой программы была произведена проверка всех мультифункций размерности 3 на принадлежность к 15 классам. Общее количество таких функций – 65536, или 4^8.Установлено, что для мультифункций размерности имеется 293 уникальных характеристических вектора. Из них 18 векторов относятся к булевым функциям, 67 – к гиперфункциям, 115 – к частичным функциям. Примеры векторов и соответствующих мультифункций приведены в таблице ниже:

Номер вектора	Характеристический вектор$q=2\pi$	Пример функции для вектора
1	010100110010000	00000000
2	000000010011011	00000001
3	010010011011011	0000000*
4	000101110010010	0000000-
5	010100111111111	00000010
6	000101110111111	0000001-
7	010110111111011	000000*0
8	000010011111011	000000*1
21	010111111111011	00000*-0
22	000011011111011	00000*-1
23	010011011011010	00000*-*
24	010101111011111	00000--0
61	000011011101011	000*-111
62	010011011001011	000*-11*
63	010011011001010	000*-***
64	000001010010111	000-1111
125	111010011011011	1111111*
126	101101110110110	1111111-
127	101010111111011	111111*1
128	111010011011010	111111**
201	100111011110111	*00-**--

202	110011001111111	*00--11*
203	110110011101110	*010*010
204	100010010110111	*0111111

В частности, результат о 18 векторах для булевых функций размерности 3 соотносится с результатом работы [2], в которой показано, что 18 – это общее количество уникальных векторов для всех булевых функций. То же самое можно сказать и про 67 векторов для гиперфункций, которые описаны для всех гиперфункций в работе [3].

Заключение

Таким образом, выполнение данной задачи является важным шагом к проверке всех мультифункций размерности 4, а она, в свою очередь – к проверке всех мультифункций. Для задачи размерности 4 методы остаются теми же; однако требуется ускорение проверки каждой функции, так как существенно увеличивается не только их количество (4^{16} по сравнению с 4^8), но и индивидуальная проверка каждой функции, особенно для классов 11-15. Также видно, что для всех уникальных векторовбулевых функций и гиперфункций можно найти представителей среди функций размерности 3. Это оставляет в качестве главных задач проверку частичных функций и мультифункций.

Библиография

1. *Пантелеев В.И.* Критерий полноты для недоопределенных частичных булевых функций. Вестник НГУ. Сер. Матем., мех., информ., 9:3 (2009). – С.95-114.

2. *Казимиров А.С., Пантелеев В.И.* О классах булевых функций, порожденных максимальными мультиклонами. Вестник Бурятского государственного университета. Сер. Матем. и информ., 9 (2015). – С. 16-22.

3. *Пантелеев В.И., Зинченко А.С.* О классах гиперфункций ранга 2, порожденных максимальными мультиклонами. Изв. Иркутск. гос. унив. Сер. Матем., 21 (2017). – С. 61-76.

Bibliography

1. *Panteleev V.I.* Kriteriypolnotydlyanedoopredelennykhchastichnykhbulevykhfunkciy [Completeness criterion for underdetermined partial Boolean functions].Vestnik NGU. Ser. Mat., Mekh., Inform., 9:3 (2009). - P.95-114.

2. *Kazimirov A.S., Panteleev V.I.* O klassakhbulevykhfunkciy, porozhdennykhmaksimal'nymimul'tiklonami [On classes of Boolean functions generated by maximal multiclones].VestnikBuryatskogogosudarstvennogouniversiteta. Ser. Mat. i inform., 9 (2015). - P. 16-22.

3. *Panteleev V.I., Zinchenko A.S.* O klassakhgiperfunkciyranga 2, porozhdennykhmaksimal'nymimul'tiklonami. [On classes of hyperfunctions of rank 2 generated by maximal multiclones] Izv. Irkutsk. gos. univ. Ser. Matem., 21 (2017). – P. 61-76.

УДК517.51, 517.553

DOI 10.53980/9785907599970_41

О НОВЫХ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ, ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ (ОТ ТЕОРИИ ВОЛН К КОМПЛЕКСНОМУ АНАЛИЗУ)*[1]

Бырдин В. М.
Институт Машиноведения им. А.А. Благонравова РАН. V_M_Byrdin@mail.ru

Реальная $u(x,y)$и мнимая $v(x,y)$ части голоморфной вещественной функции$f(z)$ ($v(x,0)\equiv 0$)чётна и нечётна по y, соотв..Даны их «раздвоенные»,маклореновские ряды, а для многих, $m\geq 3$, аргументов – эффектные асимптотики и кратные ряды. Чётная и нечётная функции$f(z)$иличёт–нечётные её компоненты адекватно связаны с их реальными и мнимыми частями. Простые асимптотики для особых точек и малых y применены мною ранее в теории волн. Сопряжение $\underline{z}$ переходит в антиголоморфность $\underline{f}(z)$. Вещественные реальная и мнимая части всякой регулярной функции $\varphi(z)$в свою очередь, голоморфны по двум (или удвоенным, при многомерном z) переменным x и y, заново комплексным, а их реальные и мнимые части голоморфны уже по 4-ём аргументам. И т.д., би-, три- и поли-голоморфность на комплексном $\mathbb{C}$–древе$z=x+iy, x=x_{X2}+iy_{X2},\ y=x_{Y2}+iy_{Y2},\ x_{X2}=x_{X3}+iy_{X3},\ldots$ Все эти части функций обладают установленными свойствами.

***Ключевые слова**. Вещественные голоморфные функции, чёт-нечётность функций, раздвоенные маклореновские ряды, антиголоморфные функции, $\mathbb{C}$–древо, полирегулярность функций, условия Коши-Римана, теория волн.*

NEW BASIC PROPERTIES OF REAL AND REGULAR FUNCTIONS & PARITY – ODDNESS, ANTIHOLOMORPHY, ABSTRACT $\mathbb{C}$-TREEANDPOLYHOLOMORPHY

Byrdin V. M.
A. A. Blagonravov Institute of Machines Science of the RAS.

Based on the Cauchy-Riemann conditions, it is proved that the real$u(x,y)$ and imaginary $v(x,y)$ parts of the holomorphic real function $f(z)$(real on the real subset) are even and odd function in y, respectively. Their "bifurcated" Maclaurin series are obtained, and for many, $m\geq 3$, arguments – spectacular asymptotes and multiple series. The even and odd function$f(z)$ or its even – odd components are adequately related to their real and imaginary parts. Simple asymptotes for singular points and for small y are given(previously used by us in the theory of waves). Conjugation of the argument turns into antiholomorphism of the function$\underline{f}(z)$. The real and imaginary parts of any regular function$\varphi(z)$are, in turn, holomorphic in two (or doubled, for multidimensional z) variables x and y, complex anew, and their real and imaginary parts are holomorphic already in 4 arguments. And so on, bi-, tri- and poly-holomorphy on the complex $\mathbb{C}$-tree$z=x+iy, x=x_{X2}+iy_{X2}, y=x_{Y2}+iy_{Y2}, x_{X2}=x_{X3}+iy_{X3},$ ... And all these parts are functions possess the formulated properties of regular real functions.

***Kayworld**.Real functions,holomorphic functions,even-odd functions,bifurcated Maclaurin series,antiholomorphic functions,complex $\mathbb{C}$-tree,polyregularity of functions,Cauchy-Riemann conditions,wave theory.*

1. Введение.Эффектное, «замечательное»(Эйлер, 1776г[1, с. 40]) применение условий Коши-Римана,Даламбера-Эйлера, к проблемам физики и математики идёт ещё от работ Д`Аламбера (1752) и Эйлера (1776), где они собственно впервые и были введены. Я применил эти условия сначала в краевых задачах и теории волн[2], а в этой работе– $\mathbb{C}$ –аналитическое развитие и обобщение.

Определение 1. Голоморфную,в $M\subset C$, функцию, действительную на вещественном подмножестве$D\subset R, D\subset M$, определим *голоморфной вещественной*, на *D*.(Вкл.и многомерный анализ).

[1]*Кр. тезисы, анн.и теорема 1 опубликованы в «Трудах Математич. центра им. Н. И. Лобачевского. Т.60 / Материалы Междунар.конф. по алгебре, анализу и геометрии 2021.– Казань: АН РТ, 2021. 422 с. С. 185.

Подчеркнём нетривиальное отличие областей определения и значений введённых вещественных, голоморфных и аналитических функций$f(z)$и действительных (вещественных)$f(x), z = x + iy.$

Анализируем, в основном,вещественные, аналитические в $\mathbb{C}$–смысле,числовые функции. Очевидно, что это один из основных, наиболее широкий класс функций в математике и в науке в целом. Кроме того, реальная и мнимая части всякой голоморфной(регулярной) функции$\varphi(z)$не только банально вещественны и R^2-дифференцируемы, но и в свою очередь *голоморфны.*И т.д., би-, три-, … и поли-регулярность (см. п. 5).Введённое мною понятие о *полиголоморфности* абстрактно, ещё без приложений. Т.о., установленные новые базисные свойства присущи большинству функций.

2.Вещественные голоморфные функции.Сначала для одной переменной. При обобщении для многих *сепаратная* вещественность немедленно нарушается мнимостью любого из аргументов и др.

Теорема 1. *Реальная$u(x,y)$и мнимая v части вещественной голоморфной,в области $M \subset C$,функции f(z)являются, соотв., чётной и нечётной в M функциями y с* ***раздвоенными,полу****-рядами:*

$$u = \Sigma_{K=0}^{\infty}[(-1)^K/(2\kappa)!]y^{2K}f^{2K)}(x),\ v = \Sigma_{K=0}^{\infty}[(-1)^K/(2\kappa+1)!]y^{2K+1}f^{2K+1)}(x),\ f^{K)} = \partial^K f/\partial x^K.(1)$$

Доказательство – на базе условий Коши-Римана и тождеств$u(x,0) \equiv f(x),\ v(x,0) \equiv 0$.В случае многих переменных –новые нюансы.

Следствие 1.*Сопряжение аргумента вещественной голоморфной функции транслируется в антиголоморфность:$f(\underline{z}) = \underline{f}(z)$.Для многих $m \geq 2$ переменных трансляция, по меньшей мере, сепаратно по каждомуz_K при вещественных других ($Jmz_n = 0,\ n \neq \kappa,\ n = 1,2,\dots,m$) или отдельно реальной и мнимой частей$f\left(\underline{z_1}; z_2; x_3; x_4; \dots\right) = \underline{u}(z_1; x_2; y_2; x_3; x_4; \dots) + i\underline{v}(z_1; x_2; y_2; x_3; x_4; \dots).$*

Проблема совместной антиголоморфности по двум и более аргументам, очевидно, потребует дополнительного анализа.

Следствие 2. *Мнимая часть$v(x,y)$функции$f(z)$одного аргумента, вещественной и чётной в области M_0 (симметричной относительно 0), будет нечётна и по y, и по x; а реальная $u(x,y)$ – чётна. Для нечётной$f(z)$смешение симметрий: v нечётна по y, но чётна по x; а и наоборот.В случае многих переменных – таже чёт-нечётность, но сепаратно по каждому аргументу z_Kпри вещественных других ($Jmz_n = 0, n \neq \kappa, n = 1,2,\dots,m$) или отдельно реальной и мнимой частей*

$$f(z_1; z_2; x_3; x_4; \dots) = u(z_1; x_2; y_2; x_3; x_4; \dots) + iv(z_1; x_2; y_2; x_3; x_4; \dots)$$

Следствие 3. *Для чётной $f_E(z)$и нечётной $f_N(z)$компонент произвольной вещественной функции одного аргумента$f(z)$в указанной области M_0 имеют место косо- и симметричные соотношения:*

$f = f_E + f_N; f_E(z) = u_{E-EXY}(x,y) + iv_{E-NXY}(x,y); f_N(z) = u_{N-NX-EY}(x,y) + iv_{N-EX-NY}(x,y);$

$u_{E-EXY} = [f(z) + f(-z) + f(\underline{z}) + f(-\underline{z})]/4; v_{E-NXY} = [f(z) + f(-z) - f(\underline{z}) - f(-\underline{z})]/4i;$

$u_{N-NX-EY} = [f(z) - f(-z) + f() - f(-)]/4; v_{N-EX-NY} = [f(z) - f(-z) - f() + f(-)]/4i.$

Где: $_E$– чёт, even, $_N$ – нечёт, пол,$_{EXY}$ – чётность по x и по y, $_{NX}$ – нечётность по x,...

3. Два или несколько переменных и особые точки.Для двух переменных выводятся компактные ряды. Для многих переменных – две асимптотики, получившие приложение в теории волн(п. 4). Кратные ряды для многих переменных в общем виде известны, см., например, [6].

Замечание 1. В экстремумах асимптотики сокращаютсяпервыми членами разложений. Что оказывается важным и физически содержательным в приложениях, в теории волн, см. след.п.4.Тоже для точки перегиба, что важно в приложениях метода перевала. В частности, здесь возникает фаза и интеграл Эйри, экстремумы групповой скорости и затухания волны и др. (см. в [4]).

4. Условия Коши-Римана в теории волн (в моих работах).

4.1. Об условиях излучения и корректности краевых волновых задач.Соотношение движения импульса и фазы волны. По принципу предельного поглощения, одному из основных,$y \downarrow 0$ и здесь эффективны асимптотики. Тогда формулируются условия излучения и определяются спектры обратных (приходящих) волн, у которых фазовая *V* и групповая *U* скорости противоположны[2,5].

4.2. О затухании волн. Аналогично $y \ll 1$ в разного рода диссипативных волноводных системах, где бегущие волны затухают, и что адекватно реальным процессам и корректным краевым задачам. Тогда коэффициент затухания волны$v(x,y) = y/U(x) + 0^3,\ U = 1/f',0^3 \sim y^3$. В структурно сложных системах (в частности, в слоистых средах) $y =_1 \{y_K\}^m,\ \Rightarrow v = U^{-1}\sigma_{K=1}^m y_K C_K + 0^3$. Данная формула весьма эффективна в математическом и физическом смысле [2, 4].

5. Комплексное, -древо и полирегулярность. В отличие от известных гиперкомплексных систем, введём комплексное древо аргументов и функций. В некой мере наше древо аналогично графу.

Определение 2. *Древо комплексных аргументов, -древо:* $z = x + iy,\ x = x_{X2} + iy_{X2},\ y = x_{Y2} + iy_{Y2}, x_{X2} = x_{X3} + iy_{X3},$ *…– со своими комплексными плоскостями. Аналогично* C^m*-гипер-древо для нескольких, m переменных* z_K.

Т.о. от каждой точки -плоскости разветвляются новые мнимые оси, а затем новые C-плоскости 2-го, 3-го и т.д. порядков, образуя, вообще говоря, неограниченно многомерное пространство. Эти оси и пространства составляют структуру древа каждой точки и-древо всей исходной комплексной плоскости. В случае исходных нескольких аргументов каждая точка в C^m-пространстве влечёт m новых мнимых осей и m новых C-плоскостей 2-го и высших порядков, образуя C^m*-древо* в целом.

Лемма 1. (о *Полирегулярности* и *Древе* голоморфной функции).*Реальная ии мнимая v части произвольной голоморфной, в области* $M \subset C$ *,функции одного аргумента* $\varphi(z)$*собственно голоморфны и вещественны, на вещественном подмножестве* $D\ M$*, как две функции двух вновь комплексных аргументови* $u_U(x_R + ix_J; y_R + iy_J) = u_U(x_R; x_J; y_R; y_J) + iv_U(x_R; x_J; y_R; y_J),\ v\ldots$ *И так далее, удвоение аргументов и функций, в принципе, неограниченное:* $x_R = x_{R3} + iy_{R3}$*; … Такое же голоморфное, но более ветвистое,гипер-, древо для регулярной функции многих переменных* $z =_1 \{z_K\}^m$*, сепаратно (по двум и более, отдельным* z_K*) или в целом.*

В доказательстве –теорема о C-дифференцируемости и Основная теорема Хартогса. Т.о.,

Определение 3.*Классическая голоморфная функция одного или нескольких переменных* ***би-, три- и полирегулярна*** *(полиголоморфна) в смысле* C*-древа, по аргументам и по функциям***.**

Что в отл. от известной биголоморфности [3].

6. Заключительные замечания. В развитие темы возможнапостановка, например, обратной задачи: восстановление исходной функции $\varphi(z)$одной переменной по заданной функции многих вещественных переменных $x =_1 \{x_K\}^m$, как реальной или мнимой части поли, m-голоморфной функции.В этом плане открывается новая связь теории функций одной и многих комплексных переменных.

Полиголоморфность – отвлечение от основной темы и ещё не нашло приложений.

Библиография

1. Эйлер, Леонард. О весьма замечательном интегрировании методом исчисления мнимых (1776 г.)//Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Функции одного переменного: Уч. в 2-х ч. Ч. 1. 4-е изд., стер. – СПб.: «Лань», 2004. – 336 с. – С. 40.

2. Бырдин В. М. Условия излучения для некоторых краевых задач с уравнениями Гельмгольца// Докл. АН. 1978. Т. 238. № 2. С. 293–295.

3. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Функции нескольких переменных: Уч.: в 2-х ч. Ч. 2. 4-е изд., стер.– СПб.: «Лань», 2004. – 464 с.

4. Бырдин В. М. Дисперсионные уравнения, функции и кривые в общей теории волн и в математической физике// Междунар.конф. по диффер.ур-ям и динамич. системам: тез.докл./ МИАН; ВлГУ; МГУ.– Владимир: Изд-во ВлГУ, 2020. – 163 с. – С. 35-38. https://cloud.mail.ru/public/Q3T1/3yCyVPkYR –дата 10.4.23

5. Сессия ОФН РАН,М., ФИАН: А) Обратные волны, янв. 2006; Б) Электромагнитные и акустич. волны в метаматериалах и структурах,февр. 2011. / Буров В.А.,Веселаго В.Г., Вашковский А.В. и др.// УФН. 2006. Т. 176. № 5. С. 557–565; 2011. Т. 181. № 11. С. 1201–1234.

6. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа.т. 1, 5-е изд.– М.: Дрофа, 2003. 703 с. § 38.

Bibliographic

1. Euler, Leonard. On a very remarkable integration by the method of imaginary calculus (1776)// Shabat B.V. Introduction to complex analysis. Functions of one variable: Uch.in 2 parts. Part 1. 4th ed., ster. SPb: Lan, 2004. 336 p. S. 40.

2. Byrdin V.M. Radiation conditions for some boundary value problems with Helmholtz equations // Dokl. AN. 1978.V. 238.No. 2. S. 293–295.

3. Shabat B.V., Introduction to complex analysis.Functions of several variables/ In 2 parts.Part 2. 4th ed.– SPb: Lan, 2004. 464 p.

4. Byrdin V.M. Dispersion equations, functions and curves in the general theory of waves and in mathematical physics// Intern. conf. by differential ur-yam and dynamic. systems: abstract./ MIAN; VlGU; MSU. - Vladimir: Publishing House of VlGU, 2020.163 p. pp. 35-38.

5. Session of the Physics Department of the Russian Academy of Sciences, M., FIAN: A) Backward waves / Jan. 2006; B) Electromagnetic and acoustic. waves in metamaterials and structures; Feb. 2011 / Burov V.A., Veselago V.G., Vashkovsky A.V. and etc.// UFN. 2006. V. 176.No. 5.S. 557–565; 2011.V. 181.No. 11. S. 1201–1234.

6. Kudryavtsev L.D. Course of mathematical analysis. V. 1, 5th ed. – M.: Drofa, 2003. 703 p. § 38.

УДК 002.6+87.3

DOI 10.53980/9785907599970_44

ЭКСПОНЕНТА ГЛОБАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ, ИНФО-ХРОНОЛОГИЧЕСКИЕ СОВПАДЕНИЯ И ГИПОТЕЗА НЕЯВНОЙ РЕЛЯТИВНОЙ ВЕДО'МОСТИ (ПРОВИДЕНИЯ) ЗЕМНОЙ ЦИВИЛИЗАЦИИ*[1]

Бырдин В. М.

Институт Машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва. V_M_Byrdin@mail.ru

Земная цивилизация, как кибернетическая система (единый субъект-объект), обладает Глобальной информацией$g_0 exp(\beta t)$ [1]. Её постоянная, планетарно-информационный период, связан с библейскими, науковедческими и демографическими данными и равен 19,977… лет (а также 46,0 и 13,847… для $10^{\gamma t}$ *и* $2^{\alpha t}$*). Кроме исходных богословских, Пророческих периодов, открыты и выявляются невероятные совпадения множества исторических периодов и дат с кратными планетарными лагами. Эта закономерность постулируется как относительная ведо'мость (махдизм, провидение, промысел божий) нашей цивилизации неявно извне, в рамках ноокосмологической концепции автора.*

Ключевые слова*. Глобальная информация. Планетарно-информационные периоды. Информационно-хронологические совпадения. Гипотеза Махдизма.*

EXPONENT OF THE GLOBAL INFORMATION, INFO-CHRONOLOGICAL COINCIDENCES AND THE HYPOTHESIS OF THE IMPLICIT RELATIVE DRIVEN (PROVIDENCE) OF EARTH CIVILIZATION

ByrdinV. M.

A. A. Blagonravov Institute of Machines Science of the RAS.

Earth civilization, as a cybernetic system (single subject-object), has Global information $g_0 exp(\beta t)$ *[1]. Its constant, planetary-information period, is associated with biblical, scientometric and demographic data and is equal to 19.977… years (as well as 46.0 and 13.847… for* $10^{\gamma t}$*and* $2^{\alpha t}$*). In addition to the original theological, Prophetic periods, incredible coincidences of many historical periods and dates with multiple planetary lags have been discovered and are being revealed. This regularity is postulated as a relative driven (Mahdism, Providence, Work of God) of our civilization implicitly from outside, within the framework of the author's noocosmological concept.*

Keywords*. Global information, Planetary information periods, Information-chronological coincidences, Hypothesis of Mahdism.*

”В начале было Слово”.«А Слово – это Информация».
Абсолютная информация.…Наукой поддержим Веру.
– соотв.,Евангелие, Ин., 1.1,ЧефрановГ. В. (1970/80-ые; см. *[2],*[1]),Бырдин В. М.

1. Введение. В Древности вся культура, включая зачатки философии и науки,базировались в церкви. Воинствующий коммунизм 19/20-го веков, вслед за просвещением и атеизмом, резко и в целом отринул богословие и церковь, включая, отчасти, и культовое искусство, и религиозную философию. Тогда как именно в этой сфере мы, человечество Землян, наиболее продвинулись в духовном постижении и научном познании теологической субкультуры, составляющей значительную часть всей мировой цивилизации. Только работ по *теонтологии* (мой термин, по «доказательству бытия бога»)и с такими заголовками дословно,целый ряд [2–7 и мн. др.]. И среди авторов такие мировые имена науки как Авиценна и Аристотель, Декарт и Гёдель,Де Клере и Лейбниц,Ньютон и Умов,Циолковский и Де Шарден, Эйлер и Эйнштейн. А в философии и теологии:Аквинский, Гегель,

[1]*Впервые данная работа (кроме пп. 1 и 5,в основном) совместно с [1] была представлена мною на Семинаре кафедры Матем. обеспечения и применения ЭВМ ТТИ-ЮФУ, проф. Мелихов А. Н. и др. коллеги,03.1994. Затем – на мехмате РГУ, 11.2001, и в ГАИШ МГУ (12.2001, но без работы [1]).

[2]*Чефранов Г. В. (1922–1991 гг. жизни)… //Википедия – дата обр. 15.4.23г

Кант, Конфуций, Лосев, Мень, Оккам, Платон, Суинбёрн, Франк и другие.«Устами движет Бог» – аспект поэзии по Ломоносову;…«Бог хотел, чтоб мы» нашли решение – штрихи анализа по Эйлеру.

К настоящему времени в богословии, искусстве, документалистике и в архивах накоплен огромный массив феноменальной («чудесной»)фактологии, связанной с непознанными,сверхъестественными и божественными данными. С некими явлениями, не получившими адекватных разумных,тем более, логических и научных трактовок. И среди них наиболее значимое,центральное явление, яркий Феномен-ноумен–ежегодное *Схождение Пасхального огня*, мистическое и сверхъестественное и, до последнего времени, всё ещё не постигнутое ни церковью, ни эзотерикой, ни искусством,ни наукой.

Одним из основных богословских положений всех мировых религий является Божественное провидение, по философии идеализма провиденциализм– основной источник исторического процесса.В данной работе анализируется историко-хронологический аспект нашей цивилизации Землян, хронология связывается с информатикой, исторические периоды соотносятся с параметрами роста общепланетарной информации, выработанной человечеством. Доказано, что Земная цивилизация, как кибернетическая система, обладает совокупной, *Глобальной* информацией, растущей со временем по экспоненте. Постоянные этого роста и обратные им планетарно-информационные периоды *–19,978…, 46* и *13,847…* лет(для оснований *e, 10*и *2* показательных функций) – рассчитаны по данным библеистики (библейские пророчества), демографии, науковедения идр. В нарушение стохастичности, получены невероятные (в математическом и психологическом смыслах), весьма точные совпадения исторических и богословских (библейских) периодов и дат с лагами кратности планетарным периодам, с временными интервалами и точками, датами. Эта закономерность трактуется преемственно религиозно-философскому провиденциализму и *ноокосмологической* концепции, идущей от *Чаадаева П. Я., Циолковского К. Э., Вернадского В. И., Пьераде Шардена, Эдуарда Ле Руа,Чефранова Г. В. и других*[1,7–9,…].И автор выдвигает гипотезу *махдизма*, неявного информационно-кибернетического патронажа, прогрессивной относительной ведомости Земной Цивилизации. Т.е. я полагаю, что наша Цивилизация ведома, во-первых, как кибернетическая система ,обладающая стремительной Глобальной информацией(след. п. 2 и [1]), а, во-вторых, в связи с невероятными инфо-хронологическими совпадениями (п. 3).Так что научно подтверждается доктрина провидения.

2. Глобальная информация и кибер-дефиниция нашей, Земной цивилизации

Определение 1. ***Глобальная информация*** *– это совокупность информации,всевозможной нетривиальной, накопленной Земной цивилизацией как единым планетарным субъектом, как кибернетической системой.*

Глобальная информация *g(t)*растёт по экспоненте. Это и по демографическим данным урбанизации, и по наукометрии, где период удвоения научной информации 10–15 лет. Также и в ряде др. областей с ростом показателей вала.Т. о.,$g/g_0 = exp(\beta t) \equiv 10^{\gamma t} \equiv 2^{\alpha t}, g_0 = const, \beta = \alpha ln2$, $\beta = \gamma ln10$. Тогда *планетарные периоды*(планетарно-информационные) оцениваются:$T_2 = 1/\alpha = 10–15$ *лет*, $T_E = 1/\beta = 15–22$, $T_{10} = 1/\gamma = 33–50$. И по моей классификации кибер-систем [1],

Лемма 1.*Земная цивилизация в информационно- кибернетическом плане определяется или как эндогенно прогрессирующая, или как ведомая.*

Вторая идентификация (гипотеза *ведомости)*, концепция *махдизма* и смежная теологическая проблематика (*теологии-науки*, в отл. от теологии-богословия) могут анализироваться на вполне логической основе, на базе современной научно-философской ноокосмологической парадигмы.

Определение 2. *Ноокосмология – это зарождающаяся научная теория о разумной, сознательной и социальной жизнедеятельности внеземной цивилизации в космосе, в Мироздании в целом и на Земле; на Земле неявно,а в космосе трудно постижимо, всё ещё мистически.*

Это направление, на основе философии, богословия и ряда наук (астрономии, космологии, искусство- и религиоведения и др.), интенсивно развивается в последние десятилетья, базируется на общекультурной идеологии Мирового и Русского космизма и уходит своими корнями в глубокую древность, в первые религиозно-философские доктрины, [8, 9 и мн. др.].

3. Невероятные совпадения, копунктации.Рассмотрим исторические и библейские данные. Объединим эвристически: 1)из п. 2 оценкиT_K, $к = 2, e, 10$; 2)*Большой* пророческий период,2300 лет; и 3) «седьмину»,7 лет. Что даст:$2300 = 50T_{10}$, $T_2 \approx 2 \times 7$ и

$$T_{10} = 46,\ T_E = 19{,}9775\ldots,\ T_2 = 13{,}84738\ldots лет. \quad (1)$$

Тогда многие исторические и богословские (библейские) периоды и даты, отчасти приведённые на рисунке 1 и являющиеся одними из важнейших вех всемирной и отечественной истории и культуры, оказываются кратными планетарным периодам (1). Причём погрешность совпадения в ряде случаев

«невероятно» высока– в несколько дней и менее (!).Так по периоду Нострадамуса погрешность ≈2,4часа, а для Великого Октября – менее 3суток. 1год точно:$1г = 31556925{,}9747с \approx 365{,}2422$ *сут*.

В совпадениях прослеживается определённый *нравственно-гуманистический отбор*. Колонизация, геноцид народов,развязыванье войн и т. п. преступные, агрессивные и бесчеловечные акции в хронологическом плане, по-видимому, не будут совпадать с лагами кратности периодамT_K.

Определение 3. *Лаги кратности планетарным периодам (1) – это точки* $t_{nK} = nT_K$ *временной оси (*$n = 1,2,3, \dots$, $к = 2, е, 10$;*для сравнения с хронологическими данными)*.

Теорема 1. *Пусть заданы реальные* $0 < a < A < \infty$, $0 < \sigma \ll 1$. *Тогда вероятность что А будет кратно, совпадёт с* $n_0 a$, *где*$n_0 \geq 1$, $n_0 \in Z, n_0 = n_1 + \lfloor 2(A/a - n_1) \rfloor$, $n_1 = \lfloor A/a \rfloor$, *и совпадёт с точностью до* $\sigma(|A - n_0 a|/n_0 a < \sigma)$, *равна* $p = 2\sigma n_0$. *Или иначе: при известном* $\Delta = A - n_0 a$*и определённой через него относительной погрешности σ, вероятность указанного совпадения (апостериорно) была равна* $p_A = \sigma n_0$.

И в этом два нюанса данной вероятностной задачи. Для рис. 1 величина σ – в пределах от *0(≈0* когда точность до часа – «день в день») и до 10^{-2}, а p от *≈0* (менее 10^{-4}*)* и до *0,144.* Это для тех, более 30-ти случаев, когда определить σ и p было возможно и имело смысл. А в целом проблема совпадений выливается в историко-математическую проблему, см. след.п. 4.

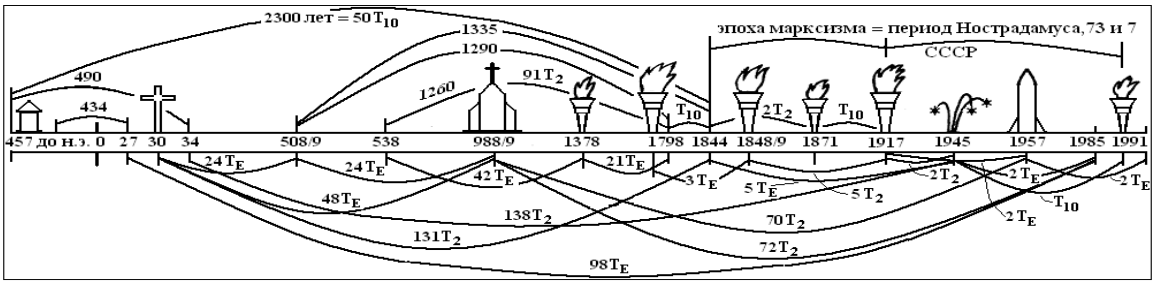


Рисунок 1 – Диаграмма исторических и богословских периодов и дат
и кратность планетарным периодам

На рисунке 1 даты вглубь истории. 1991, 19–21 авг. – путч и Августовская революция в СССР. 1985, 23 апр. – начало Перестройки, апрел. пленум ЦК КПСС. 4 окт. 1957($98T_E$) – начало Космической эры. 1945, 9 мая – 2 сент. – победа в Отечественной войне и во Второй Мировой. 7 нояб. 1917($96T_E$) – Великий Октябрь и Феврал. революция в России,рис. 2.1871 – вторая Парижская коммуна. 1848–49 гг. – революционный подъём в ряде стран Европы (в Австрии, Венгрии, Германии, Италии, Франции и Чехии). 1844 – эсхатологич. срок Уильяма Миллера (адвентизм, «начало суда на Небе»),начало эпохи марксизма (моё определ., «Экономико-философские рукописи»). 1798 / $90T_E$ – «конец всевластия папства» (антиклерикал. восстание римлян, пленение Пия VI и др.). 1789–94 гг. / $39T_{10}$– Штурм Бастилии, Великая Французская революция и Парижская Коммуна.22 июня 1378 / $69T_E$ – первое в истории политич. восстание рабочих–чомпи, Флоренция. 988–9 гг. – Крещение Руси. 538г – «получение папством всей полноты власти». 508г – полная евангелизация Запада.34г – Евангелизация, «начало проповеди Евангелия язычникам». 30г – Распятие, Воскресение и Вознесение Христа. 27г/ $2T_2$ – «помазание», Крещение Христа и 40 дней его искушения. 457/456 до н. э. – «повеление о восстановлении Иерусалима и храма» древне-персид. царей; репатрианты Ездры.

Рисунок 2. «В беломвенце(…) Христос»по*Ал. Блоку*.https://www.google.com/search?q=«в+белом+венчике+Христос»+КартинкиДата обр. 14.4.23г

4. Махдизм и теорема кисметизма, о предустановленных хронологических совпадениях

Лемма 2. *Копунктации (совпадения) численного данного с избранными числами мульти-валентно, несёт количественно вероятностный и философский междисциплинарный смыслы. Причём количественный реестр многозначен с вероятностями рот совмещённой копунктации с погрешностью* $\delta < 1, \delta \downarrow 0$, *почти 0, и до полной вероятности*$P \approx 1, P < 1$, *почти 100%.*

Утверждение (теорема) 2.*Невероятные копунктации (инфо-хронологические совпадения) исторических периодов, интервалов и дат с лагами кратности планетарным периодам, за исключением о пределённой стохастичности, составляют предустановленную закономерность,* ***кисметизм.***

Введённые мои понятия и термины:*Кисметизм*(от турецк.кисмет) – неизбежность, предопределение, из ислама; *Копунктация*, от лат. *punctum*– точка, в ср. и в отличие от совместных и др. событий в теории вероятностей. Т.о., вновь проблема ведомости нашей цивилизации, вторая, существенная посылка моей гипотезы (о первой см. выше, в п. 2).И подчеркнём, что в теореме не определяется источник предустановления, патронажа, это Бог, Ноокосм, Абсолют, внеземная цивилизация, разумная инстанция или случайность? (пусть последняя и с вероятностью процента).Утверждается лишь низкая вероятность совпадений и высокая кисметизма.

Определение 4. *Махдизм –это неявное ведение, патронаж личности, группы и, через эти субъекты, ведение стран и народов и цивилизации Землян в целом; Махдизм прогрессивный гуманистический информационный относительный.*

Махдизм, отараб. *Махди*,– ведомый, ведомый Аллахом Мессия. Основным символом махдизма представляется Пасхальный огонь. Это перманентное Чудо мировой церкви и великая научная проблема современности.

5. Замечание о математических доказательствах бытия бога или о теонтологии и теонтологическая теорема-гипотеза

Определение 5 (Бога). *Бог – это совершенная социальная панкосмологическая цивилизация.*

Гипотеза-теорема 3 (основная, теонтологическая)**.** *Бог есть.*

На данное время гипотеза. Доказательство же теоремы, индуктивно-концептуальное, вне доклада, в рамках ноокосмологической концепции автора; где индукция – обобщение множества культурологич. данных. Одним из базисных компонентов экспериментального док-ва служит Пасха, Схождение «благодатного» непалящего огня. Окончательным экспериментальным док-вом будет, конечно , открытие отношений меж Земной и панкосмической цивилизациями, ожидаемое Церковью как Второе пришествие божье, всемирного *Христа-Майтри-Махди*(трёх религий;[в 1, автор, 2016]).

Замечание X. Из понятия *совершенный бог* (религ. «Всесовершенный, Всемогущий») следует: 1) само над-временное бытие бога (док-во – методом от противного); и 2) тео-атрибутика,все другие качества, основные «божии» . Это «всесильный», мудрый («премудрый»), гармоничный,высоко душевный («милостливый , милосердный»), информированный («всезнающий»), вечный («бессмертный, предвечный»), пан-космический («вездесущий») и др.Дефиниция же *Космологический*– лишь второстепенная геометрич. опция тео-определения 5.А *социальная* категория основная – цивилизация на базе совершенного человеческого общества. Вкл. и наших предков, «воскресших в раю» и «пребывающих на Небе»…

6. Заключит.замечание. Современные научное и церковное сообщества совмещают науку и религию. В частности, с 2015 г. Теология – научная специальность. А вышедшая в 2000-ые гг. «Православная энц.» проявила высокий уровень этой философско-исторической научной отрасли. Долг передовой науки объяснить, поддержать и утвердить церковную Высокую Веру всех конфессий.

Библиография

1. Бырдин В.М. Закон сохранения и умножения информации, экспонента информации и классификация кибернетических и социальных систем// Математика, ее приложения и матем. образование: Материалы VI Междунар.конф., Улан-Удэ - Байкал, 26.6–01.7.17. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2017. – С. 115-121.

2. Декарт Рене.Доказательство существования Бога. (1641г)// Соч. в 2 тт. Т. 2. – М.: Мысль, 1994. С. 3–72.

3. Лейбниц Г.В. Есть Совершеннейшее Существо (1700-ые)// Лейбниц Г.В. Соч. в 4ёх тт. Т. 1. – М.: Мысль,1982. – С. 116-117.

4. Де Клере Р. Математическое доказательство необходимости бытия Божия/ Пер. с фр. под ред. П. Флоренского. – Серг. Пос., 1915.

5. Pruss, Alexander. "Leibnizian Cosmological Arguments" in Blackwell Companion to Natural Theology, Oxford: Blackwell, 2009.

6. Пушкарский А.Г. Курт Гедель и его онтологическое доказательство// РАЦИО.ru. 2014. №. 13. С. 153-172.

7. Струминский В.В. (…)жизнь на Земле и других планетах космоса//Вестник РАН. 1995. № 1. С. 38-51.

8. Хайруллин К.Х. Философия космизма.– Казань: Дом печати, 2003. – 370 с.

9. Черновицкая Ю. В. Ноокосмология: социально-этические аспекты контакта с внеземными цивилизациями// Космология, физика, культура/ Ин-т филос. РАН; В. В. Казютинский и др.– М.: ИФ РАН, 2011. – С. 220–242.

Bibliographic

1. ByrdinV.M.The law of conservation and multiplication of information, the exponent of information and the classification of cybernetic and social systems // Mathematics, its applications and mat. education: Materials VI Inter-dunar. Conf., Ulan-Ude - Baikal, 26.6–01.7.17.– Ulan-Ude: ESGUTU, 2017, pp. 115-121.

2. Descartes Rene. Proof of the existence of God. (1641) // Works. in 2 vols. T. 2. M.: Thought, 1994. S. 3–72.

3. Leibniz G.W. There is a Perfect Being (1700s)// Leibniz G.V. Works in 4 v. V. 1. M.: Thought, 1982. S. 116-117.

4. De Claire R. Mathematical proof of the necessity of the existence of God / Translated from French.ed. P. Florensky. Serg.Pos., 1915.

5. Pruss, Alexander. "**Leibnizian** Cosmological Arguments" in Blackwell Companion to Natural Theology, Oxford: Blackwell, 2009.

6. Pushkarsky A.G. **Kurt Gödel** and his ontological proof// RATSIO.ru. 2014. No. 13. S. 153-172.

7. Struminsky V.V. (...) life on Earth and other planets in space // Bulletin of the RAS. 1995. No. 1. P. 38-51.

8. KhairullinK.Kh. Philosophy of Cosmism. – Kazan: Press House, 2003. – 370 p.

9. Chernovitskaya Yu. V. Noocosmology: social and ethical aspects of contact with extraterrestrial civilizations / / Cosmology, physics, culture / Institute of philosophy RAS; V.V. Kazyutinsky et al. M.: IP RAN, 2011. – P. 220–242.

УДК 517.518.87

DOI 10.53980/9785907599970_49

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С ПЕРЕМЕННЫМ ШАГОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Е.Г. Васильева
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,
Россия, Улан-Удэ, vasil_eg@mail.ru

Построена квадратурная формула с переменным шагом, где шаг интегрирования выбирается в зависимости от того, как быстро меняется функция в каждом из интервалов.
Ключевые слова: *квадратурная формула, шаг интегрирования.*

QUADRATURE FORMULAS WITH VARIABLE INTEGRATION STEP

E.G. Vasileva
East Siberia State University of Technology and Management, Russia, Ulan-Ude,
vasil_eg@mail.ru

A quadrature formula with a variable step is constructed. The integration step is chosen depending on how quickly the function changes in each of the intervals.
Keywords *quadrature formula, integration step.*

Построим квадратурную формулу с переменным шагом интегрирования в пространстве $L_\infty^m(a,b)$.

Пространство $L_\infty^m\left(E_1\right)$- множество функций, имеющих абсолютно непрерывную производную (*m*-1)-го порядка и существенно ограниченную измеримую обобщенную производную *m*-го порядка.

Норма функции в $L_\infty^m\left(E_1\right)$ определяется равенством

$$\left\|\varphi\right\|_{L_\infty^m(E_1)}=\lim_{p\to\infty}\left[\int_{E_1}\left|\varphi^{(m)}\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}=vrai\sup_{x\in E_1}\left|\varphi^{(m)}\left(x\right)\right|=M,$$

Для этого интеграл представим в виде

$$\int_a^b\varphi\left(x\right)dx=\sum_{s=1}^k\int_{\Delta_s}\varphi\left(x\right)dx.$$

Каждый из интегралов справа можно подсчитать квадратурной формулой с симметричным пограничным слоем со своим шагом $h_s,\quad s=1,2,...,k,$ выбранным в зависимости от того, как быстро меняется функция $\varphi\left(x\right)$ в интервале Δ_s.

Пусть (*a, b*) = (0,1), $\frac{1}{N}=h,\ N=\sum_{s=1}^k N_s$ и $l_{(0,1)}^h\left(x\right)$ -функционал погрешности с симметричным пограничным слоем порядка *m*.

Разобьем полуинтервал [0,1) на непересекающиеся полуинтервалы Δ_s, *s* = 1, 2, ..., *k*, с концами в узлах решетки $h\beta\in$ [0,1), т.е.

$$[0,1) = \bigcup_{s=1}^{k} \Delta_s, \quad mes\Delta_s = |\Delta_s|.$$

Пусть $\frac{|\Delta_s|}{N_s} = h$ и $h_s = K_s h$.

Параметры N_s, K_s и N согласованы, т.е. $K_s > h, N_s$ и NK_s -целые числа.

Функционал погрешности квадратурной формулы с переменным шагом интегрирования представим в виде

$$l^{\bar{h}}_{(0,1)}(x) = \sum_{s=1}^{k} l^{h_s}_{\Delta_s}(x), \tag{1}$$

где $l^{h}_{(0,1)}(x)$ - функционал погрешности с симметричным пограничным слоем для области Δ_s, s = 1, 2, ..., *к*.

В формуле (1) пограничные слои в концах полуинтервалов Δ_s несколько расширились.

Пусть $\varphi \in L^m_\infty(a,b)$ и $\|\varphi\|_{L^m_\infty(a,b)} = vrai \sup_{x\in(a,b)} |\varphi^{(m)}(x)|$.

Рассмотрим подмножество *A* пространства $L^m_\infty(a,b)$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\|\varphi\|_{L^m_\infty(\Delta_s)} \le M_s \le \|\varphi\|_{L^m_\infty(a,b)}, \quad s = 1,2,...,k.$$

Если $\varphi \in A$, то из оценки

$$\left\langle l^{h}_{(a,b)}, \varphi \right\rangle \le B_m h^m (b-a) \|\varphi\|_{L^m_\infty(a,b)} \left(1 + O(h)\right)$$

имеем

$$\left\langle l^{\bar{h}}_{(a,b)}, \varphi \right\rangle = \left| \sum_{s=1}^{k} \left\langle l^{h_s}_{\Delta_s}(x), \varphi(x) \right\rangle \right| \le B_m h_s^m |\Delta_s| M_s \left(1 + O(h)\right). \tag{2}$$

По методу Лагранжа минимизируем главный член правой части неравенства (2) при фиксированном числе узлов, $|\Delta_s|$ и M_s, s = 1,2, ..., *k*.

Для этого рассмотрим функцию Лагранжа

$$F(h_s) = \sum_{s=1}^{k} |\Delta_s| M_s h_s^m + \lambda \left(\sum_{s=1}^{k} \frac{|\Delta_s|}{h_s} - N \right)$$

где - $\frac{|\Delta_s|}{h_s} = N_s, \quad s = 1,2,...,k$

Находим частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial h_s} = m h_s^{m-1} |\Delta_s| M_s - \lambda \frac{|\Delta_s|}{h_s^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \sum_{s=1}^{k} \frac{|\Delta_s|}{h_s} - N.$$

Приравнивая производные к нулю, получим следующую систему:

$$\sum_{s=1}^{k} \frac{|\Delta_s|}{h_s} - N = 0, \quad m h_s^{m-1} |\Delta_s| M_s = \lambda \frac{|\Delta_s|}{h_s^2}. \tag{3}$$

Решим систему (3):

$$h_s^{m-1} = \frac{\lambda}{M_s} \quad \text{или} \quad h_s = \frac{\lambda^{\frac{1}{m+1}}}{m M_s^{\frac{1}{m+1}}} \tag{4}$$

Далее

$$\sum_{s=1}^{k} m h_s^m \left|\Delta_s\right| M_s = \lambda \sum_{s=1}^{k} \frac{\left|\Delta_s\right|}{h_s} = \lambda N. \tag{5}$$

Теперь формулу (4) подставим в (5)

$$\sum_{s=1}^{k} \frac{m \lambda^{\frac{m}{m+1}} \left|\Delta_s\right| M_s}{M_s^{\frac{m}{m+1}}} = \lambda N$$

Отсюда находим

$$\lambda = \frac{\left(\sum_{s=1}^{k} m M^{\frac{1}{m+1}} \left|\Delta_s\right| \right)^{m+1}}{N^{m+1}} \tag{6}$$

Из формул (4) и (6) получим

$$h_s = \frac{\sum_{s=1}^{k} M_s^{\frac{1}{m+1}} \left|\Delta_s\right|}{M_s^{\frac{1}{m+1}}} \frac{1}{N}. \tag{7}$$

Из формулы (7) следует, что сетка мельче там, где M_s, s = 1, 2, ..., *k*, больше.

Библиография

1. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. – 2-е изд., доп.– М.: Наука, 1967.– 500 с.

2. Никольский С.М. Квадратурные формулы. – 4-е изд., доп. с добавлением Н.П. Корнейчука. – М.: Наука, 1988. – 256 с.

УДК 517.518.87

DOI 10.53980/9785907599970_52

ОЦЕНКА СНИЗУ ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

Е.Г. Васильева
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Россия, Улан-Удэ, vasil_eg@mail.ru

Получена оценка снизу произвольного функционала погрешности в пространстве $L_p^m(E_1)$.
***Ключевые слова**: оценка, функционал погрешности, квадратурная формула.*

A LOWER ESTIMATE FOR THE ERROR FUNCTIONAL OF QUADRATURE FORMULAS

E.G. Vasileva
East Siberia State University of Technology and Management, Russia, Ulan-Ude, vasil_eg@mail.ru

A lower estimate for the error functional of quadrature formulas in the space $L_p^m(E_1)$ *is obtained.*
***Keywords:** estimate, error functional, quadrature formula.*

Оценим норму любого функционала погрешности из $L_p^{m*}(E_1)$ снизу и вычислим главный член этой оценки.

Сначала рассмотрим некоторые свойства экстремальной функции $\varphi_0\left(\frac{x}{h}\right)$, соответствующей оптимальному периодическому функционалу

$$\tilde{l}_0\left(\frac{x}{h}\right)=1-\sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} h\delta\left(x-h\gamma\right)$$

Периодическая экстремальная функция $\varphi_0\left(\frac{x}{h}\right)$ имеет вид

$$\varphi_0\left(\frac{x}{h}\right)=\sum_{\gamma} c_\gamma \frac{e^{2\pi i h^{-1}\gamma x}}{\left(2\pi i h^{-1}\gamma\right)^m} \tag{1}$$

где

$$c_\gamma=\int_0^h\left|\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{2\pi i h^{-1}\beta y}}{\left(2\pi i h^{-1}\beta\right)^m}+h^m\overset{\circ}{C}\right|^{\frac{1}{p-1}}\operatorname{sgn}\left(\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{2\pi i h^{-1}\beta y}}{\left(2\pi i h^{-1}\beta\right)^m}+h^m\overset{\circ}{C}\right)e^{-2\pi i h^{-1}\gamma y}dy,$$

где $\overset{\circ}{C}$ определяется из следующего уравнения

$$\int_0^1\left|\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{2\pi i\beta y}}{\left(2\pi i\beta\right)^m}+\overset{\circ}{C}\right|^{\frac{1}{p-1}}\operatorname{sgn}\left(\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{2\pi i\beta y}}{\left(2\pi i\beta\right)^m}+\overset{\circ}{C}\right)dy=0,$$

Отсюда коэффициент ряда Фурье (1) $c_0 = 0$.

Вычислим

$$\int_0^h \varphi_0\left(\frac{x}{h}\right)\tilde{l}_0\left(\frac{x}{h}\right)dx = h^{mp'+1}\int_0^1 \varphi_0(x)\tilde{l}_0(x)\,dx =$$

$$h^{mp'+1}\left[\int_0^1 \varphi_0(x)\,dx - \varphi_0(0)\right] = h^{mp'}\left(-\varphi_0(0)\right) =$$

$$= h^{mp'+1}(-1)\int_0^1 \left|\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{2\pi i\beta y}}{(-2\pi i\beta)^m} + \overset{\circ}{C}\right|^{p'} dy,$$

т.к., на основании (1)

$$\varphi_0 = \sum_\gamma \frac{c_\gamma}{(2\pi i\gamma)^m} = \int_0^1 \left|\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{-2\pi i\beta y}}{(-2\pi i\beta)^m} + \overset{\circ}{C}\right|^{p'} dy$$

Кроме того,

$$\left|<\tilde{l}_0(x), \varphi_0(x)>\right| = -\int_0^1 \varphi_0(x)\,dx + \varphi_0(0) =$$

$$= \left\|\tilde{l}_0(x)\right\|_{L_p^{m*}(0,1)} \left\|\varphi_0(x)\right\|_{L_p^m(0,1)} > 0$$

Всякая периодическая функция $\varphi\left(x-x^0\right)$, сдвинутая на величину x^0 имеет ту же норму, что и $\varphi(x)$. Тогда

$$\left\|\varphi_0\left(x-x^0\right)\right\|_{L_p^m} = \left\|\varphi_0(x)\right\|_{L_p^m}$$

В силу определения нормы, имеем

$$\left|\left\langle\tilde{l}_0(x), \varphi_0\left(x-x^0\right)\right\rangle\right| = -\int_0^1 \varphi_0\left(x-x^0\right)dx + \varphi_0\left(x^0\right) \le$$

$$\le \left\|\tilde{l}_0\right\|_{\tilde{L}_p^{m*}} \left\|\varphi_0\left(x-x^0\right)\right\|_{\tilde{L}_p^m} = \left\|\tilde{l}_0\right\|_{L_p^{m*}} \left\|\varphi_0(x)\right\|_{\tilde{L}_p^m} = \varphi_0(0)$$

Отсюда $\varphi_0\left(x-x^0\right) \le \varphi_0(0)$

Следовательно, экстремальная функция $\varphi_0\left(\frac{x}{h}\right)$ достигает абсолютного максимума в точках решеток $h\beta$.

Введем функцию $\psi_0\left(\frac{x}{h}\right) = \varphi_0(0) - \varphi_0\left(\frac{x}{h}\right)$

Функция $\psi_0\left(\frac{x}{h}\right)$ также дает максимальное значение функционалу

$$< \tilde{l}_0(x), \psi_0(x) >= \left\| \tilde{l}_0 \right\|_{L_p^{m^*}} \left\| \psi_0 \right\|_{L_p^m}$$

Функция $\psi_0\left(\frac{x}{h}\right)$ обладает следующими свойствами:

1. $\psi_0\left(\frac{x}{h}\right) = \psi_0\left(\frac{x}{h} - \beta\right), \quad \forall \beta \in R$

2. $\psi_0(\beta) = 0 \quad \grave{e} \quad \psi_0\left(\frac{x}{h}\right) \geq 0,$

3. $\int_0^h \psi_0\left(\frac{x}{h}\right) dx = h^{mp'+1} \int_0^1 \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{-2\pi i \beta y}}{(-2\pi i \beta)^m} + C \right|^{p'} dx.$

Введем следующие множества и функции:

$\Gamma_h = (0,h) \cup (1-h,1),$

$(0,1)_h = (0,1) \setminus \Gamma_h,$

$(0,1)_{2h} = (0,1) \setminus \Gamma_{2h},$

$\omega(x) - шапочка,$

$\varepsilon_{(0,1)_h}(x) - характеристическая\ функция\ области\ (0,1)_h,$

$\varphi_h\left(\frac{x}{h}\right) = \omega\left(\frac{x}{h}\right) * \varepsilon_{(0,1)_h}(x) = h^{-1} \int \omega\left(\frac{x-y}{h}\right) \varepsilon_{(0,1)_h}(y)\, dy$ срезывающая функция или средняя функция.

Отметим, что:

– шапочка $\omega\left(\frac{x-y}{h}\right)$ бесконечно дифференцируемая финитная функция,

supp $\omega\left(\frac{x-y}{h}\right) = [x-h, x+h]$ и $\int \omega(y)\, dy = 1$

– средняя функция с радиусом усреднения h равна единице в $(0,1)_{2h}$, так как при $x \in (0,1)_{2h}$ носитель $[x-h, x+h]$ не пересекается с $(0,1)_h$,

– по той же причине $\varphi_h\left(\frac{x}{h}\right) = 0$ вне (0,1).

Следовательно,

$\varphi_h\left(\frac{x}{h}\right) = 1$ в $(0,1)_{2h}$ и

$\left|\varphi_h\left(\frac{x}{h}\right)\right| \le 1$ в полосе $S_{2h} = (0,2h) \cup (1-2h,1).$

Функция $\varphi_h\left(\frac{x}{h}\right)$ имеет все производные любого порядка, отличные от нуля в полосе $S_{2h} = (0,2h) \cup (1-2h,1).$

$$\varphi_h^{(s)}\left(\frac{x}{h}\right) = \frac{d^s}{dx^s}\left[\frac{1}{h}\int \omega\left(\frac{x-y}{h}\right)\varepsilon_{(0,1)_h}(y)\,dy\right] =$$

$$= h^{-s-1}\int \omega^{(s)}\left[\frac{x-y}{h}\right]\varepsilon_{(0,1)_h}(y)\,dy,$$

где $\omega^{(s)}\left[\frac{x}{h}\right]$ означает подстановку в $\omega^{(s)}(x)$ величины $\frac{x}{h}$ вместо *x*.

В полосе S_{2h} производные от $\varphi_h\left(\frac{x}{h}\right)$ удовлетворяют неравенству

$$\left|\varphi_h^{(s)}\left(\frac{x}{h}\right)\right| < Kh^{-s}$$

Лемма.. *При любом h существует срезывающая функция* $\psi_h\left(\frac{x}{h}\right)$ *такая, что*

$$\psi_h(x) = 0, \quad \textit{если} \quad x = h\beta \ \textit{или} \quad x \bar{\in} (0,1)$$

и

$$\int \psi_h\left(\frac{x}{h}\right)dx \ge h^{mp'}\int_0^1 \left|\sum_{\gamma\ne 0}\frac{e^{-2\pi i\gamma x}}{(-2\pi i\gamma)^m} + \overset{\circ}{C}\right|^{p'} dx + O\left(h^{mp'+1}\right),$$

$$O\left(h^{mp'+1}\right) = 4h^{mp'+1}\int_0^1 \left|\sum_{\beta\ne 0}\frac{e^{-2\pi i\beta x}}{(-2\pi i\beta)^m} + \overset{\circ}{C}\right| dx.$$

Доказательство.

Для доказательства леммы положим

$$\psi_h\left(\frac{x}{h}\right) = \psi_0\left(\frac{x}{h}\right)\varphi_h\left(\frac{x}{h}\right).$$

По построению функции $\varphi_h\left(\frac{x}{h}\right)$ имеем

$$\psi_h\left(\frac{x}{h}\right)=\begin{cases}\psi_0\left(\frac{x}{h}\right), & \text{если } x\in(0,1)_{2h}\\ 0, & \text{если } x\in\overline{(0,1)}\\ \psi_0\left(\frac{x}{h}\right)\varphi_h\left(\frac{x}{h}\right), & \text{если } x\in S_{2h}\end{cases}$$

Вычислим интеграл

$$\int\psi_h\left(\frac{x}{h}\right)dx=\int_{2h}^{1-2h}\psi_0\left(\frac{x}{h}\right)dx+\int_{S_{2h}}\psi_0\left(\frac{x}{h}\right)\varphi_h\left(\frac{x}{h}\right)dx=$$

$$=\sum_{\beta=2}^{N-2}\int_{h\beta}^{h(\beta+1)}\psi_0\left(\frac{x}{h}\right)dx+\int_{S_{2h}}\psi_0\left(\frac{x}{h}\right)\varphi_h\left(\frac{x}{h}\right)dx=$$

$$=\operatorname{mes}(0,1)_{2h}\,h^{mp'}\int_0^1\left|\sum_{\gamma\neq0}\frac{e^{-2\pi i\gamma x}}{(-2\pi i\gamma)^m}+\overset{\circ}{C}\right|^{p'}dx+h^{mp'+1}\int_{S_{2h}}\psi_0(x)\varphi_h(x)\,dx.$$

Отбрасывая последний интеграл, находим

$$\int\psi_h\left(\frac{x}{h}\right)dx\geq h^{mp'}\int_0^1\left|\sum_{\gamma\neq0}\frac{e^{-2\pi i\gamma x}}{(-2\pi i\gamma)^m}+\overset{\circ}{C}\right|^{p'}dx+O\left(h^{mp'+1}\right),$$

$$O\left(h^{mp'+1}\right)=4h^{mp'+1}\int_0^1\left|\sum_{\gamma\neq0}\frac{e^{-2\pi i\gamma x}}{(-2\pi i\gamma)^m}+\overset{\circ}{C}\right|dx.$$

где

Лемма доказана.

Теорема. *Какова бы ни была последовательность функционалов погрешности квадратурных формул с узлами в точках решетки*

$$l_{(0,1)}=\varepsilon_{(0,1)}-\sum_{\gamma}hC_\gamma\delta(x-h\gamma)$$

при $h\to0$ *имеет место оценка*

$$\left\|l_{(0,1)}\right\|_{\overset{\circ}{L}_p^{m*}(0,1)}\geq h^m J_m^{\frac{p-1}{p}}+O\left(h^{m+1}\right)$$

где $O\left(h^{m+1}\right)\leq hK.$

Доказательство.

Сначала покажем, что $\psi_h\left(\frac{x}{h}\right)\in\overset{\circ}{L}_p^m(0,1).$

Для этого вычислим норму функции $\psi_h\left(\frac{x}{h}\right)$ *в* $\overset{\circ}{L}_p^m(0,1)$

$$\left\|\psi_h\left(\frac{x}{h}\right)\right\|^{\varsigma}_{\overset{\circ}{L}_p^m(0,1)} = \int\limits_{(0,1)_{2h}}\left|\psi_0^{(m)}\left(\frac{x}{h}\right)\right|^p dx + \int\limits_{S_{2h}}\left|\psi_h\left(\frac{x}{h}\right)\right|^p dx = I_1 + I_2$$

Сначала найдем I_1

$$I_1 = \sum_{\gamma=2}^{N-2}\int\limits_{h\gamma}^{h(\gamma+1)}\left|\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{-2\pi i h^{-1}\beta x}}{\left(-2\pi i h^{-1}\beta\right)^m} + h^m\overset{\circ}{C}\right|^{p'} dx =< x \leftrightarrow hx >=$$

$$= \int\limits_0^1\left|\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{-2\pi i\beta x}}{\left(-2\pi i\beta\right)^m} + \overset{\circ}{C}\right|^{p'} dx h^{mp'} + 4\int\limits_0^1\left|\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{-2\pi i\beta x}}{\left(-2\pi i\beta\right)^m} + \overset{\circ}{C}\right|^{p'} dx h^{mp'+1} \tag{2}$$

Дифференцируя функции $\psi_0\left(\frac{x}{h}\right)\varphi_h\left(\frac{x}{h}\right)$ по формуле Лейбница, в полосе S_{2h} ширины *4h* находим ее производную *m-го* порядка

$$\psi_0\left(\frac{x}{h}\right)\varphi_h\left(\frac{x}{h}\right)^{(m)} =$$

$$\varphi_h\left(\frac{x}{h}\right)\psi_0^{(m)}\left[\frac{x}{h}\right]h^{mp'-m} + \psi_0\left(\frac{x}{h}\right)\varphi_h^{(m)}\left(\frac{x}{h}\right)h^{mp'-m} +$$

$$+\sum_{s=1}^{m-1}C_s^m h^{mp'-s}\psi_0^{(m)}\left[\frac{x}{h}\right]h^{-m+s}\varphi_h^{(m-s)}\left(\frac{x}{h}\right) =$$

$$= Y_1(x) + Y_2(x) + Y_3(x)$$

Оценим следующие интегралы

$$\int\limits_{S_{2h}}\left|Y_1(x)\right|^p dx \le 4hh^{(mp'-m)p}\left(\max_{x\in[0,1]}\left|\varphi_h(x)\psi_0^{(m)}(x)\right|\right)^p,$$

$$\int\limits_{S_{2h}}\left|Y_2(x)\right|^p dx \le 4hh^{(mp'-m)p}\left(\max_{x\in[0,1]}\left|\psi_0(x)\varphi_h^{(m)}(x)\right|\right)^p \tag{3}$$

и

$$\int\limits_{S_{2h}}\left|Y_3(x)\right|^p dx = \int\limits_{S_{2h}}\left|\sum_{s=1}^{m-1}C_s^m h^{mp'-s}\psi_0^{(s)}\left[\frac{x}{h}\right]h^{-m+s}\varphi_h^{(m-s)}\left(\frac{x}{h}\right)\right|^p dx \le$$

$$\le 4hh^{(mp'-m)p}\left(\max_{\substack{1\le s\le m\\ x\in[0,1]}}\left|\psi_0^{(s)}(x)\varphi_h^{(m-s)}(x)\right|\right)p$$

Из оценок (2) и (3) находим

$$\int\limits_{(0,1)_{2h}}\left|I_1(x)\right|^p dx = J_m h^{mp'-m}\left(1+O(h)\right), \tag{4}$$

где $O(h) \le 4hJ_m$,

$$\int_{s_{2h}} |I_2(x)|^p \, dx = h^{(mp'-m)p+1} |o(1)|, \tag{5}$$

где

$$o(1) \le 4 \max_{x \in [0,1]} \varphi_h(x) \psi_0^{(m)}[x] + 4 \max \psi_0(x) \varphi_h^{(m)}[x] +$$

$$+ \max_{\substack{1 \le s \le m \\ x \in [0,1]}} \left(\sum_{k=1}^{m-1} C_k^m \psi_0^{(s)}[x] \varphi_h^{(m-s)}[x] \right) = K \tag{6}$$

Норма функции $\psi_h\left(\frac{x}{h}\right)$ имеет оценку

$$\left\| \psi_h\left(\frac{x}{h}\right) \right\|_{\overset{\circ}{L}_p^m(0,1)} \ge J_m h^{mp'-m} + h^{(mp'-m)+1} o(1).$$

Используя оценки (4), (5), (6), получим

$$\|l(x)\|_{\overset{\circ}{L}_p^m(0,1)} \ge \frac{\int \psi_h(x)\,dx}{\|\psi_h\|_{\overset{\circ}{L}_p^m(0,1)}} = J_m^{\frac{p-1}{p}} h^m \left(1 - h^{\frac{1}{p}} o(1) + O(h)\right).$$

Теорема доказана.

Библиография

1. Соболев С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. – Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996. – 484 с.

2. Шойнжуров Ц.Б. Оценка нормы функционала погрешности кубатурных формул в различных функциональных пространствах. – Улан-Удэ: Изд-во БНЦ СО РАН, 2005. – 274 с.

УДК 51.07

DOI 10.53980/9785907599970_59

О ПРИМЕНЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НАГЛЯДНОСТИ К АБСТРАКТНЫМ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ СТРУКТУРАМ НА ПРИМЕРЕ ТЕОРИИ СЕЧЕНИЙ УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛЕЙ

Галанова Н.Ю., Подкорытов М.В.
Томский государственный университет, Россия, Томск
galanova@math.tsu.ru, maximthegreate@yandex.ru

Сечение линейно упорядоченной алгебраической структуры даёт её наглядную геометрическую интерпретацию. Поле действительных чисел может быть построено с помощью Дедекиндовых сечений. Рассматривается методика исследования линейно упорядоченных полей методами теории сечений. Есть два взгляда на сечения л.у. поля – изнутри и снаружи: заполняя сечения исходного поля можно получить новое поле – расширение, а производя сечения элементами расширения можно изучать свойства исходного поля.

Ключевые слова: *преподавание математики, линейно упорядоченное поле, сечение.*

Galanova N.Yu., Podkorytov M. V.
Tomsk State University, Russia, Tomsk
galanova@math.tsu.ru, maximthegreate@yandex.ru

ON THE APPLICATION OF VISUAL IMAGES TO ABSTRACT ALGEBRAIC STRUCTURES BY THE EXAMPLE OF THE THEORY OF CUTS OF ORDERED FIELDS

The cut (gap, section) of a totally ordered algebraic structure gives its visual geometric interpretation. The field of real numbers can be constructed using Dedekind cuts. The method of investigation of totally ordered fields by methods of the theory of cuts is considered. There are two views on the cuts of the field – from the inside and from the outside: by filling of the cuts of the original field, you can get a new expansion field, and by generating cuts with expansion elements, you can study the properties of the original field.

Key words*: teaching mathematics, totally ordered field, cut (gap, section).*

Введение. Линейно упорядоченным полем (л.у. полем) $(F,+,\cdot,0,1,\leq)$ называется непустое множество F, в котором определены две операции сложение и умножение, удовлетворяющие аксиомам поля и введено отношение порядка $\leq$, согласованное с операциями. Один из подходов к построению модели $\mathbf{R}$ поля вещественных чисел, как известно [1], является модель сечений Дедекинда. При изучении линейно упорядоченных полей (л.у. поля), таких как подполя $\mathbf{R}$ (архимедовы поля), а также неархимедовых полей, служащих обобщённой основой для построения математического анализа, эффективно обращаться к наглядным образам при помощи теории сечений, идеи которой восходят к работам Дедекинда и продолжают развиваться [2,3].

Сечение (A,B) линейно упорядоченного поля $(F,+,\cdot,0,1,\leq)$ это пара его непустых подмножеств таких, что, одно множество лежит левее другого $\forall a\in A\ \forall b\in B\quad a<b$ и их объединение $A\cup B$ даёт всё поле F.

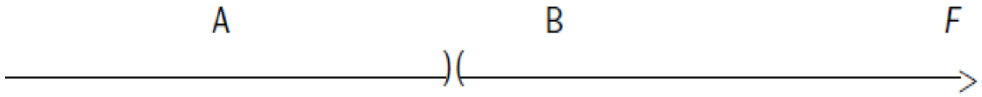


Рисунок 1 – Сечение л.у. поля

Дедекинд рассматривал сечение в поле $\mathbf{Q}$ как некоторое число, из множества сечений образуя новое поле – поле действительных чисел, например $\sqrt{2}=(A,B),\quad A=\{q\in\mathbf{Q}_+\,|\,q^2<2\}\cup\{q\in\mathbf{Q}\,|\,q\leq 0\}$,

$B = \{q \in \mathbf{Q}_+ \mid q^2 > 2\}$. Современный подход к изучению упорядоченных полей состоит в том, что для всякого линейно упорядоченного поля есть более широкое л.у. поле (расширение) в котором данное поле содержится. Элементы расширения л.у. поля порождают сечения в исходном поле, например, $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$ (где $\mathbf{R}$ задано аксиомами, а $\sqrt{2}$ это такой элемент, что его квадрат равен 2) порождает сечение в $\mathbf{Q}$. Т. о., есть два взгляда на сечения л.у. поля – изнутри и снаружи: заполняя сечения исходного поля можно получить новое поле – расширение, а производя сечения элементами расширения можно изучать свойства исходного поля.

Классификация сечений и примеры сечений для архимедовых полей (подполя R).

Собственное (Дедекиндово) сечение – сечение, не производящееся элементом поля, например, в поле $\mathbf{R}$ нет собственных сечений, в поле $\mathbf{Q}$ собственные сечения соответствуют иррациональным числам. Такие сечения не имеют ни наибольшего элемента в A, ни наименьшего элемента в B.

Фундаментальное сечение (сечение Скотта) – $\forall \varepsilon \in F, \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad \exists b \in B : b - a < \varepsilon$. Например, все сечения подполей $\mathbf{R}$ и самого $\mathbf{R}$ – фундаментальны.

Симметричное сечение – если для каждого $a \in A$ существует такое $a_1 \in A$, что $(a_1 + (a_1 - a)) \in B$ и для каждого $b \in B$ существует такое $b_1 \in B$, что $(b_1 - (b - b_1)) \in A$. Например, все иррациональные числа порождают в поле $\mathbf{Q}$ симметричные сечения.

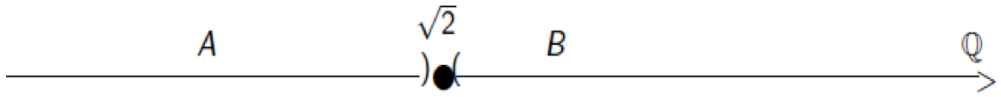


Рисунок 2 – Фундаментальное, симметричное, алгебраическое сечение

Несимметричное сечение, это сечение, не являющееся симметричным, и в архимедовых полях это только несобственные сечения, произведённые элементом самого поля.

(A,B) – *алгебраическое* сечение, если существуют упорядоченное расширение K поля F и элемент $a \in K \setminus F$, порождающий данное сечение (A,B), причем a является алгебраическим элементом над F, т.е., существует многочлен с коэффициентами из поля F с корнем a. Например, в поле $\mathbf{R}$ нет алгебраических сечений, в поле $\mathbf{Q}$ - это сечения, производящиеся алгебраическими иррациональными числами.

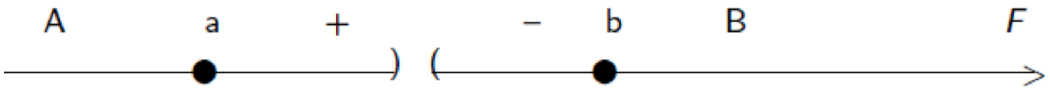


Рисунок 3 – Алгебраическое сечение

Трансцендентное сечение – это сечение, не являющееся алгебраическим, например, в поле $\mathbf{R}$ все сечения трансцендентны, а в поле $\mathbf{Q}$ трансцендентны сечения, порождаемые трансцендентными элементами и несобственные сечения.

Упражнение. Для архимедовых полей имеет место следующая связь между видами сечений:

несимметричное=несобственное; симметричное= (алгебраическое или собственное трансцендентное); фундаментальное=любое.

Некоторые виды полноты (замкнутости) упорядоченных полей на языке сечений[3].

Вещественная замкнутость – все сечения трансцендентны. Например, вещественное замыкание поля $\mathbf{Q}$. Поле $\mathbf{R}$.

Непрерывная (топологическая) замкнутость – нет собственных фундаментальных сечений. Например, все у. подполя $\mathbf{R}$.

Архимедова замкнутость – все сечения несимметричны. Например, поле $\mathbf{R}$.

Об изоморфизме л.у. полей. Взаимно однозначное соответствие между двумя л.у. полями, сохраняющее операции и отношение порядка называется изоморфизмом л.у. полей. Классический пример, поле $\mathbf{R}$ определено однозначно с точностью до изоморфизма. Симметричность сечения

сохраняется при изоморфизме, например, поля $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ не изоморфны – в первом есть симметричные сечения, во втором нет.

Линейно упорядоченные неархимедовы поля естественно возникают как обобщение поля действительных чисел с помощью присоединения «бесконечно малых». В таких полях могут появиться нефундаментальные сечения, собственные несимметричные сечения, а также для вещественно замкнутых л.у. полей работает теорема об изоморфизме использующая симметрию сечений [3].

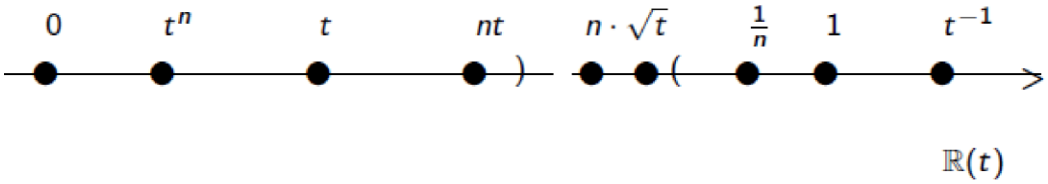


Рисунок 4 – Несимметричное, нефундаментальное, алгебраическое сечение

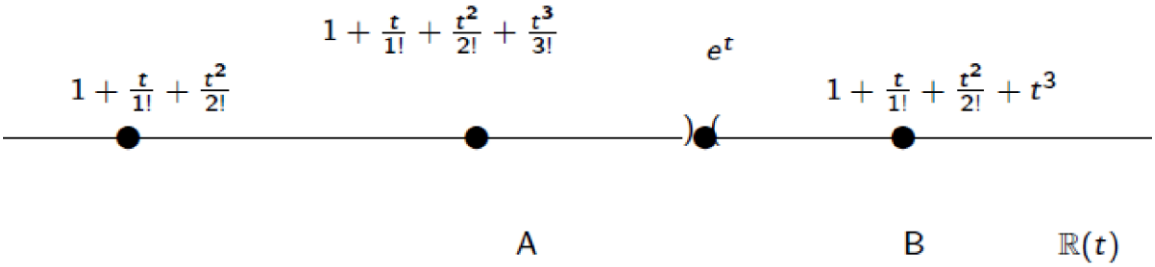


Рисунок 5 – Трансцендентное, симметричное сечение

Заключение. Методика исследования упорядоченных полей с помощью теории сечений, показывает примеры того, что свойства сечений поля определяют различного рода полноту упорядоченных полей, позволяют проводить классификацию полей, выявлять наличие или отсутствие изоморфизма полей и позволяет наглядно представить строение алгебраической структуры, наделённой отношением порядка.

Библиография

1. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Физматлит. 2003. – 440 с.

2. Kuhlmann F.-V. {\it Selected methods for the classification of cuts and their applications.}// Proceedings of the 5th Joint Conferences on Algebra, Logic and Number Theory, June 24–29, 2018, Bedlewo. Banach Center Publications V. 121 (2020), pp. 85-106. DOI: 10.4064/bc121-9

3. *Пестов Г.Г.* Исследования по упорядоченным группам и полям в Томском государственном университете // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. №3(15).

Bibliography

1. *Fichtenholz G. M.* Course of differential and integral calculus. Vol. 1. M.: Fizmatlit, 2003. – 440 p.

2. Kuhlmann F.-V. {\it Selected methods for the classification of cuts and their applications.}// Proceedings of the 5th Joint Conferences on Algebra, Logic and Number Theory, June 24–29, 2018, Bedlewo. Banach Center Publications V. 121 (2020), pp. 85-106. DOI: 10.4064/bc121-9

3. Pestov G.G. (2011). [Investigations on ordered groups and fields in Tomsk State University]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 3(15).

УДК 59.03

DOI 10.53980/9785907599970_62

НЕКОТОРЫЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ, СВЯЗАННЫЕ С СЕЙСМИЧЕСКОЙ ОБСТАНОВКОЙ МОНГОЛИИ

Д.Ганхуяг*, Л.Баяр-Эрдэнэ, Г.Саруул*****

** Монгольский государственный университет науки и технологии, Монголия, Улан-Батор*
Gankhuyagd@gmail.com

*** Монгольский государственный университет науки и технологии, Монголия, Улан-Батор*
Bayar@must.edu.mn

**** АО "Строительная корпорация", Монголия, Улан-Батор,* Saruka0818@gmail.com

В статье приведена краткая информация о сейсмическом состояний Монголии и рассматривается методология оценки сейсмической опасности на основе вероятностных моделей. Рассмотрена задача многокритериальной оптимизации, связанная с строительством.

Ключевые слова: *Сейсмическое положение, землетрясение, вероятностные модели, оценка ситуации, оптимизационные методы.*

Введение

В последнее время количество, мощность и частота землетрясений, происходящих на территории Монголии, резко возросли. В связи с этим очень важно правильно рассчитать сейсмическую опасность и построить сейсмостойкие здания. Проблему лучше всего решить, используя последние математические достижения для расчета сейсмических сил и проектирования здания с использованием многокритериальной оптимизации.

1. Краткая информация о землетрясениях в Монголии, за последние 10 лет.

В период с 01.01.2012 по 30.04.2023 на территории Монголии происходили 403554 землетрясений разных магнитудов (рис. 1, 2). Из них, происходили землетрясений с магнитудой М6- 3 раза, М5- 19, М4- 228, М3- 1627.

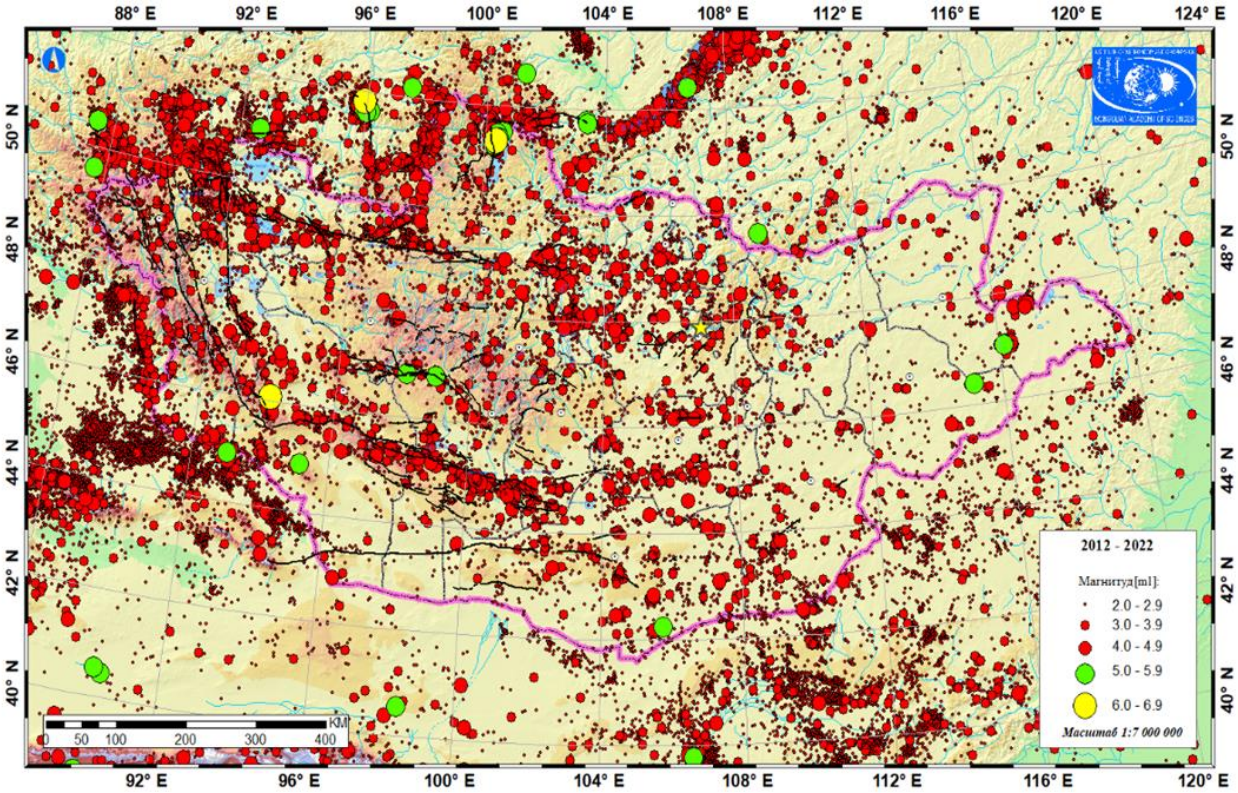


Рисунок 1 – Распределение эпицентров землетрясений за 2012-2022 гг.[1]

[1] "Землетрясения в Монголии и приграничных районах", Институт астрономии и геофизики Академии наук.

Общее кличество землетрясений в данном году отмечено синим цветом, а количество землетрясений с магнитудой 3.5 и более обозначены красным цветом.

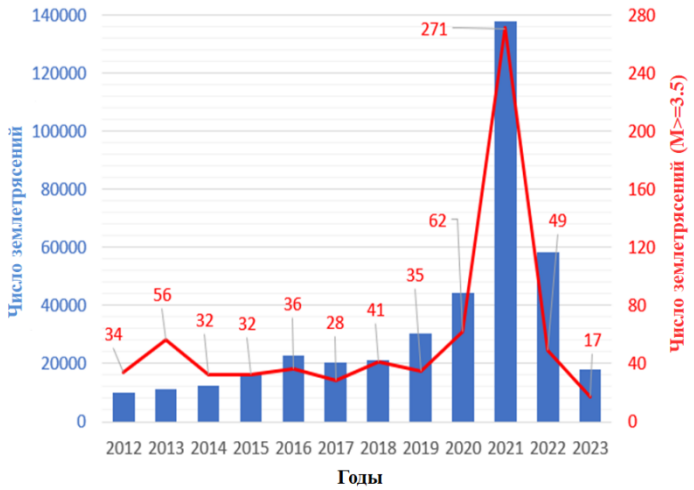


Рисунок 2 – Статистика землетрясений за 01.01.2012-30.04.2023 гг.

Количество землетрясений на таблицах показывает резкий рост числа землетрясений в 2021 году. Это увеличение на прямую связано с землетрясением магнитудой 6.7 и его афтершоками, которые произошли 12 января 2021 года в районе Ханх сум провинции Хубсугуль.

2. Землетрясения в окрестности города Улан-батор

С 1 января 2021 года по 30 апреля 2023 года в городе Улан-батор и его окрестностях(46.8-49.0 широты, 104.8-109.0 долготы) зарегистрировано 12102 землетрясения (рис. 3, 4). Произошло 2 землетрясения магнитудой M5, 7 землетрясений магнитудой M4 и 66 землетрясений магнитудой M3.

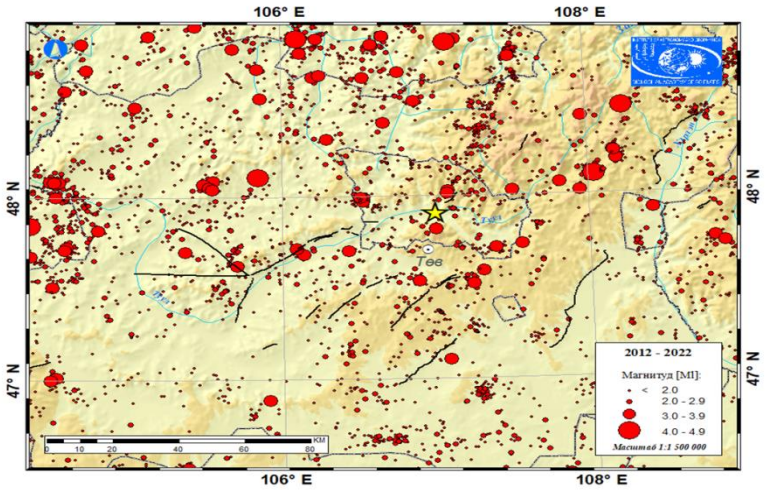


Рисунок 3 – Распределение эпицентров землетрясений в окрестностях города Улан-Батор за 2012-2022 гг.

3. Математические расчеты оценки сейсмической опасности и оптимизационные модели

В настоящее время разрабатываюся новые математические и вычислительные модели сейсмичности и проектирования сейсмостойких сооружений. В работе рассмотрена методология оценки сейсмической опасности на основе вероятностных моделей сейсмичности. Данный подход позволяет рассчитать сейсмическую опасность в населенных пунктах, расположенных в радиусе воздействия группы сейсмических зон.

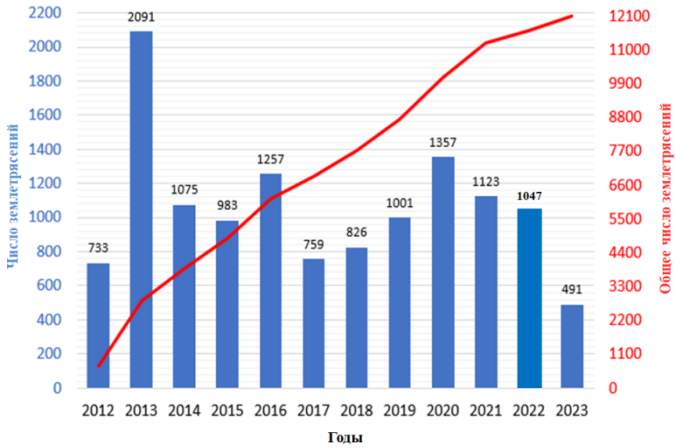


Рисунок 4 – Статистика землетрясений в окрестностях города Улан-Батор за 01.01.2012-30.04.2023

Выявляются сейсмические зоны с помощью кластерного анализа. Для анализа сейсмической опасности местности по нормам EC8 определяется годовая интенсивность превышений $\lambda_k = \lambda(I^k)$ порога интенсивности I^k по формулам:

$$p_r^k = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{I_r}^{12} e^{-\frac{(I-\bar{I})^2}{2\sigma^2}} dI \quad (1)$$

$$\beta_k = \sum_{s=1}^{S} p_k^s \gamma_s \quad (2)$$

$$\lambda_k = \lambda \cdot t \cdot \beta_k \quad (3)$$

где, S - сейсмические зоны, r - эпицентральное расстояние, λ - годовая интенсивность

Для оптимизации строительных сооружении рассматривается многоэкстремальная задача:

$$f_i(x) \to max,\ i=1,\ \dots,\ l_1 \quad (4)$$

$$f_i(x) \to min,\ i=1,\ \dots,\ l_2 \quad (5)$$

$$Ax \le b \quad (6)$$

$$\underline{x} \le x \le \bar{x} \quad (7)$$

где, $x = (x_1,\dots,x_n),\ A = (\alpha_{ij}), i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n$

Заключение

Расчет с использованием реальных количественных данных на разработанных моделях повысит актуальность статьи.

Библиография

1. М.Базара, К.Шетти., Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. – Москва, 1982.
2. Burtiev R., Evaluation of seismic hazards from several seismic zones. Environ. Eng. Manag. J.12, 32—42. 2012.
3. J. S. Gero, N. D'Cruz, A. D. Radford, A multicriteria model for building design, Building and Environment 18 (1983) 99–107.
4. Hua-wei Zhou. Practical Seismic Data Analysis. University of Houston, 2014.
5. R. T. Marler, J. S. Arora, The weighted sum method for multi-objective optimization: new insights, Structural and Multidisciplinary Optimization 41 (2010) 853–862.
6. Minnal K.Sen, Paul L. Stoffa, Global Optimization methods in Geophysical inversion. 2019.
7. Shearer, Peter M. Introduction to Seismology. Textbook, 2019.

УДК 519.87

DOI 10.53980/9785907599970_65

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ СЕТЕВОЙ МОДЕЛИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПРЕДПРИЯТИЯ

Гармаев В.Д., Гармаева С.С., Чимитова В.В.
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,
Россия, Улан-Удэ, gavede@mail.ru

Для построения модели процесса функционирования предприятия используется аппарат теории сетей Петри. Определение всех возможных состояний процесса и переходов между состояниями строится граф достижимости сети. Вероятностные характеристики процесса определяются с помощью соответствующей цепи Маркова.

Ключевые слова: *математическое моделирование, сети Петри, цепи Маркова.*

CONSTRUCTION AND ANALYSIS OF THE NETWORK MODEL OF FUNCTIONING ENTERPRISE

Garmaev V.D., Garmaeva S.S., Chimitova V.V.
East Siberia State University of Technology and Management,
Russia, Ulan-Ude, gavede@mail.ru

To build a model of the process of enterprise functioning, the apparatus of Petri nets theory is used. Determination of all possible process states and transitions between states is done by constructing the network reachability graph. Probabilistic characteristics of the process are defined by means of appropriate Markov chain.

Key words: *mathematical modeling, Petri nets, Markov chains.*

Введение

Сети Петри имеют достаточно широкое применение при разработке и анализе моделей функционирования предприятий различного рода деятельности. Полученная при этом информация позволяет оценить процесс функционирования данного предприятия, определить состояния в которых может находиться предприятие в процессе своей деятельности, выявить нежелательные состояния и выяснить каким образом можно их избежать, каким образом можно добиться требуемого состояния.

Постановка задачи

Согласно [1], сеть Петри представляет собой набор объектов $C=\left(P,\,T,\,I,\,O\right)$, где $T=\left\{t_1,t_2,...,t_k\right\}-$совокупность переходов, отражающих происходящие события, $k\geq 0$. $P=\left\{p_1,p_2,..\,,p_n\right\}-$совокупность позиций, отражающих условия, предшествующие реализации события (предусловия) и условия, возникающие в результате его наступления (постусловия), $n\geq 0$.

Состояние процесса определяется вектором маркировки $\vec{m}=\left(m_1,\,m_2,...,m_n\right),\ n=\left|P\right|$ сети Петри. Начальное состояние процесса определяется вектором $\vec{m}^{(0)}=\left(m_1^{(0)},\,m_2^{(0)},...,m_n^{(0)}\right)$. Множество достижимости сети Петри $D\left(C,\vec{m}^0\right)$ представляет собой совокупность маркировок, которые могут получиться в результате реализации переходов сети исходя из начальной маркировки.

Рассмотрим вопрос построения модели функционирования предприятия в виде сети Петри, с последующим представлением в виде графа достижимости и привлечением цепей Маркова для анализа процесса. На рис. 1 представлена сеть Петри, моделирующая функционирование страховой компании, занимающейся страхованием физических лиц и предприятий различной формы собственности.

Совокупность P содержит 7 позиций: p_1- имеется возможность работы с клиентом; p_2- проведен анализ представленного комплекта документов; p_3- подготовлены документы для

выплаты страхового возмещения; p_4 – подготовлены документы для отказа в выплате страхового возмещения; p_5 – проведен судом анализ представленного комплекта документов; p_6 – подготовлены судом документы для отказа в выплате страхового возмещения; p_7 – подготовлены судом документы о выплате страхового возмещения и штрафа за несоблюдение в добровольном порядке удовлетворения требований потребителя.

Совокупность T содержит 9 переходов: t_1 – заявление принято к рассмотрению; t_2 – принято решение о выплате страхового возмещения; t_3 – принято решение об отказе в выплате страхового возмещения; t_4 – представление документов в суд; t_5 – судом принято решение о выплате страхового возмещения и штрафа за несоблюдение в добровольном порядке удовлетворения требований потребителя; t_6 – судом принято решение об отказе в удовлетворении иска; t_7 – компанией добровольно выплачено страховое возмещение; t_8 – компанией доведены до клиента решения суда; t_9 – решения суда о выплате страхового возмещения и штрафа за несоблюдение в добровольном порядке удовлетворения требований потребителя.

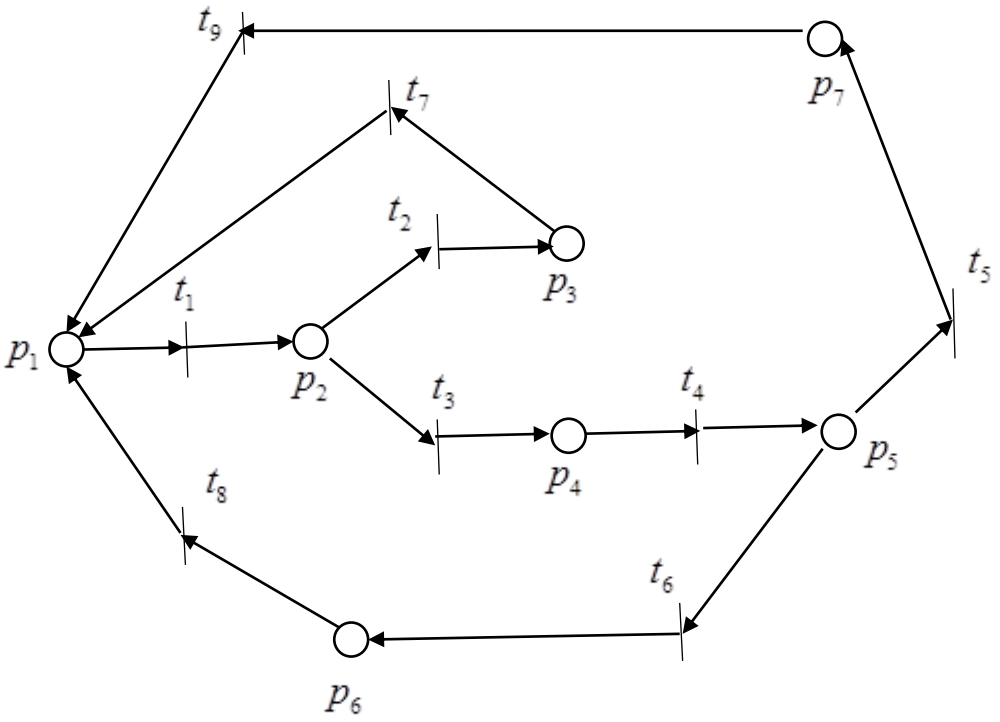


Рисунок 1 – Модель обслуживания заявления страхователя

Граф достижимости $G=(M,R)$ сети Петри, моделирующей процесс представляет собой совокупность всех возможных состояний процесса и последовательность в их изменении.

Пусть начальное состояние процесса определяется вектором $\vec{m}^{(0)}=(1,0,0,0,0,0,0)$, которое означает готовность к работе с поступившим заявлением от клиента. Дальнейшие состояния S_i, $i=1,2,...,7$ можно представить в виде графа достижимости (рис. 2):

$$(1,0,0,0,0,0,0)-S_1$$
$$\downarrow t_1$$
$$(0,1,0,0,0,0,0)-S_2$$
$$\swarrow t_2 \qquad\qquad \searrow t_3$$

$(0,0,1,0,0,0,0) - S_3$ $(0,0,0,1,0,0,0) - S_4$

$\downarrow t_7$ $\downarrow t_4$

$(1,0,0,0,0,0,0) - S_1$ $(0,0,0,0,1,0,0) - S_5$

$\swarrow t_5$ $\searrow t_6$

$(0,0,0,0,0,0,1) - S_7$ $(0,0,0,0,0,1,0) - S_6$

$\searrow t_9$ $\swarrow t_8$

$(1,0,0,0,0,0,0) - S_1$

Рисунок 2 – Граф достижимости маркировок сети Петри

Цепь Маркова для данного процесса имеет вид:

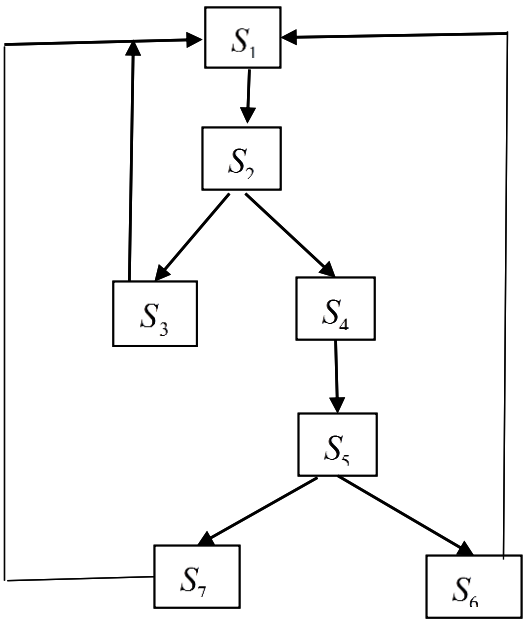


Рисунок 3 – Представление процесса в виде цепи Маркова

По структуре представленной на рис. 3 цепи Маркова видно, что она является эргодической [2], то есть с возрастанием номера шага k в ней устанавливается стационарный режим.

Система уравнений, состоящая из балансовых уравнений для всех состояний, кроме первого, и нормировочного условия, для определения предельных вероятностей имеет вид:

$$\begin{cases} r_1 = r_2, & r_2 p_{23} = r_3, \\ r_2 p_{24} = r_4, & r_4 = r_5, \\ r_5 p_{56} = r_6, & r_5 p_{57} = r_7, \\ r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_4 + r_6 + r_7 = 1. \end{cases}$$

Решая систему находим, что

$$r_1 = r_2 = \frac{1}{3 + 2p_{24}},\ r_3 = \frac{p_{23}}{3 + 2p_{24}},\ r_4 = r_5 = \frac{p_{24}}{3 + 2p_{24}},\ r_6 = \frac{p_{24} p_{56}}{3 + 2p_{24}},\ r_7 = \frac{p_{24} p_{57}}{3 + 2p_{24}}.$$

Как видно, полученное решение в значительной степени зависит от численного значения переходной вероятности p_{24}, вероятности перехода из состояния S_2 в состояние S_4, то есть принятия компанией решения об отказе в выплате страхового возмещения.

Заключение

Рассмотренный подход можно применить к моделированию процесса функционирования предприятий различного рода деятельности, в частности предприятий сферы услуг.

Библиография

1. *Питерсон Дж.* Теория сетей Петри и моделирование систем: Пер. с англ.– М.: Мир, 1984 − 264с.
2. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. − М.: КНОРУС, 2013.– 448 с.

Bibliography

1. Peterson J. Petri nets theory and system modeling: Trans. from English– M.: Mir, 1984. – 264p.
2. Wentzel E.S., Ovcharov L.A. Theory of random processes and its engineering applications. − M.: KNORUS, 2013. – 448 p.

УДК 517.956.3

DOI 10.53980/9785907599970_69

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА[1*]

Гражданцева Е.Ю.*

**Иркутский государственный университет, Россия, Иркутск;*
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Россия, Иркутск,
grelyur@mail.ru

В продолжение исследований гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка в работе предложено решение задачи Коши для неоднородной системы с однородными начальными условиями и решение задачи Коши для однородной системы с неоднородными условиями.

Ключевые слова: *система дифференциальных уравнений, задача Коши.*

SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A NONHOMOGENEOUS LINEAR SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN FIRST ORDER PARTIAL DERIVATIVES

Grazhdantseva E.Yu.*

**Irkutsk State University, Russia, Irkutsk; Melentiev Energy Systems Institute Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Russia, Irkutsk, grelyur@mail.ru*

In continuation of the study of hyperbolic systems of partial differential equations of the first order, the solution of the Cauchy problem for an inhomogeneous system with homogeneous initial conditions and the solution of the Cauchy problem for a homogeneous system with inhomogeneous conditions are proposed.

Key words*: system of differential equations, Cauchy problem.*

Введение

Гиперболическими системами дифференциальных уравнений 1-го порядка описываются многочисленные физические процессы, например, поведение сплошной среды, а именно: неустановившееся течение жидкости, сверхзвуковое двумерное установившееся движение сжимаемых газов и т.п. Поэтому естественным образом возникает задача построения решения уравнения или системы уравнений, которыми описывается исследуемое физическое явление. С некоторыми исследованиями можно ознакомиться, например, в работах [1-7] и библиографических ссылках к ним. наиболее развита область построения численного решения задачи. Однако , наличие точного решения, даже ограниченного наложением условий (условий согласования) упрощает получение решения в целом, что, в свою очередь, ускоряет процесс решения. Данная работа посвящена построению точного решения задачи Коши для неоднородной линейной системы дифференциальных уравнений.

1. Постановка задачи

Пусть $(x, y) \in D \subset R^2$, R^2 - двухмерное евклидовое пространство Рассматриваем систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + a\dfrac{\partial v}{\partial y} = g_1(x, y), \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} + c\dfrac{\partial u}{\partial y} = g_2(x, y), \end{cases} \tag{1}$$

с неоднородными условиями

[1*] Работа выполнена при поддержке гранта FWEU-2021-0006 программы фундаментальных исследований РФ на 2021-2030 гг.

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ v(x,0)=\psi(x), \tag{2}$$

где $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ - искомые функции о значениями в R, $g_1(x,y)$ и $g_2(x,y)$ - известные, достаточно гладкие функции со значениями в R, x и y - независимые переменные, a и b - действительные числа.

Утверждение 1. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны и существуют непрерывные производные $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\psi'(x)$, $\psi''(x)$ для любых x, удовлетворяющих включению $(x,y)\in D\subset R^2$, a и b - действительные числа. Тогда задача Коши для однородной системы

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}+a\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}+c\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\end{cases}$$

с неоднородными условиями $u(x,y)\big|_{y=\tau}=\varphi(x)$, $v(x,y)\big|_{y=\tau}=\psi(x)$

имеет точное решение вида

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x-\frac{(y-\tau)}{\sqrt{ac}})+\varphi(x+\frac{(y-\tau)}{\sqrt{ac}})\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c}}\left(\psi(x-\frac{(y-\tau)}{\sqrt{ac}})-\psi(x+\frac{(y-\tau)}{\sqrt{ac}})\right),$$

$$v(x,y)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}\left(\varphi(x-\frac{(y-\tau)}{\sqrt{ac}})-\varphi(x+\frac{(y-\tau)}{\sqrt{ac}})\right)+\frac{1}{2}\left(\psi(x-\frac{(y-\tau)}{\sqrt{ac}})+\psi(x+\frac{(y-\tau)}{\sqrt{ac}})\right).$$

Утверждение 2. Пусть функции $g_1(x,y)$ и $g_2(x,y)$ являются непрерывно дифференцируемыми до второго порядка включительно $\forall(x,y)\in D\subset R^2$ со значениями в R, a и b - действительные числа. Тогда задача Коши для неоднородной системы

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w_1}{\partial x}+a\dfrac{\partial w_2}{\partial y}=g_1(x,y),\\ \dfrac{\partial w_2}{\partial x}+c\dfrac{\partial w_1}{\partial y}=g_2(x,y),\end{cases} \tag{3}$$

с однородными условиями $w_1(x,0)=0,\qquad w_2(x,0)=0$ (4)

имеет точное решение вида $w_1(x,y)=\int_0^y\widetilde{w}_1(x,y,\tau)d\tau,\ w_2(x,y)=\int_0^y\widetilde{w}_2(x,y,\tau)d\tau,$ где

$$\widetilde{w}_1(x,y,\tau)=\frac{1}{2c}\left(g_2(x-\frac{1}{\sqrt{ac}}(y-\tau),\tau)+g_2(x+\frac{1}{\sqrt{ac}}(y-\tau),\tau)\right)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{ac}}\left(g_1(x-\frac{1}{\sqrt{ac}}(y-\tau),\tau)-g_1(x+\frac{1}{\sqrt{ac}}(y-\tau),\tau)\right),$$

$$\widetilde{w}_1(x,y,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{ac}}\left(g_2(x-\frac{1}{\sqrt{ac}}(y-\tau),\tau)-g_2(x+\frac{1}{\sqrt{ac}}(y-\tau),\tau)\right)+$$

$$+\frac{1}{2a}\left(g_1(x-\frac{1}{\sqrt{ac}}(y-\tau),\tau)+g_1(x+\frac{1}{\sqrt{ac}}(y-\tau),\tau)\right).$$

Теорема. Задача Коши (1)-(2) имеет решение вида

$$u(x,y)=\widetilde{u}(x,y)+w_1(x,y),\quad v(x,y)=\widetilde{v}(x,y)+w_2(x,y),$$

где функции $w_1(x,y)$, $w_2(x,y)$ являются решением системы (3)-(4), а функции $\widetilde{u}(x,y)$ и $\widetilde{v}(x,y)$ определяются по формулам

$$\widetilde{u}(x,y)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x-\frac{1}{\sqrt{ac}}y)+\varphi(x+\frac{1}{\sqrt{ac}}y)\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c}}\left(\psi(x-\frac{1}{\sqrt{ac}}y)-\psi(x+\frac{1}{\sqrt{ac}}y)\right),$$

$$\widetilde{v}(x,y)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}\left(\varphi(x-\frac{1}{\sqrt{ac}}y)-\varphi(x+\frac{1}{\sqrt{ac}}y)\right)+\frac{1}{2}\left(\psi(x-\frac{1}{\sqrt{ac}}y)+\psi(x+\frac{1}{\sqrt{ac}}y)\right).$$

Заключение

Таким образом, построено решение задачи Коши для неоднородной линейной системы двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными функциями от двух независимых переменных.

Библиография

1. *Андреев А.А., Огородникова Е.Н.* Применение матричных интегродифференциальных операторов в постановке и решении нелокальных краевых задач для систем уравнений гиперболического типа // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия:Физико-математические науки. – № 12. – С.45-53.
2. *Гражданцева Е.Ю., Солодуша С.В.* Об одном аналитическом решении нелинейного дифференциального уравнения в частных производных // Proceedings of the 7th International Conference on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA - 2022). 2022. – С. 42-44.
3. *Картвелишвили Л.Н.* Принципы расчета гидравлического удара и их развитие // Природоустройство. 2012. – С.72-77.
4. *Мышкис А.Д., Филимонов А.М.* О глобальной непрерывной разрешимости смешанной задачи для одномерных гиперболических систем квазилинейных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44. – № 3. – С. 394-407.
5. *Полянин А.Д, Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 256 с.
6. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их применение в газовой динамике. – М.: Наука, 1978. – 688 с.
7. *Assanova A.T., Zholamankyzy A.* Problem with Data on the Characteristics for a loaded System of Hyperbolic Equations. // Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2021. – Vol. 31, No. 3. – P 353-364.

Bibliography

1. *Andreev A.A., Ogorodnikova E.N.* Application of matrix integro-differential operators in setting and solving non-local boundary value problems for systems of equations of hyperbolic type // Bulletin of the Samara State Technical University. Series: Physical and mathematical sciences. – No. 12. – P.45-53.
2. *Grazhdantseva E.Yu., Solodusha S.V.* On one analytical solution of a nonlinear partial differential equation // Proceedings of the 7th International Conference on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA - 2022). 2022. - P. 42-44.
3. *Kartvelishvili L.N.* Principles of calculation of hydraulic shock and their development // Nature Management. 2012. – P.72-77.
4. *Myshkis A.D., Filimonov A.M.* On global continuous solvability of a mixed problem for one-dimensional hyperbolic systems of quasilinear equations // Differential Equations. 2008. – Vol. 44. – No. 3. – P. 394-407.
5. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I.* Methods for solving nonlinear equations of mathematical physics and mechanics. – M.: FIZMATLIT, 2005. – 256p.
6. *Rozhdestvensky B.L., Yanenko N.N.* Systems of quasilinear equations and their application in gas dynamics. – M.: Nauka, 1978. – 688p.
7. *Assanova A.T., Zholamankyzy A.* Problem with Data on the Characteristics for a loaded System of Hyperbolic Equations. // Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2021. – Vol. 31, No. 3 – P 353-364.

УДК 517.9

DOI 10.53980/9785907599970_72

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ХАЙЕРСУ-УЛАМУ-РАССИАСУ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ В ПРАВОЙ ЧАСТИ И С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1*]

Гредасова Н.В.*, Павленко В., Сесекин А.Н.***, Шуляева К.С.******

** Уральский федеральный университет, Россия, Екатеринбург,gredasonan@mail.ru*

***Уральский федеральный университет, Россия, Екатеринбург,vera.pavlenko.99@mail.ru*

****Уральский федеральный университет, Россия, Екатеринбург,sesekin@list.ru*

*****Уральский федеральный университет, Россия, Екатеринбург,shuliaeva32@gmail.com*

Для линейных дифференциальных уравнений первого порядка с обобщенным воздействием в правой части и с запаздыванием предложена формализация понятия устойчивости по Хайерсу-Уламу-Рассиасу. Рассмотрены два типа дифференциальных уравнений и установлен факт такой устойчивости для этих уравнений.

Ключевые слова: *устойчивость по Хайерсу-Уламу-Рассиасу,обобщенное воздействие, запаздывание, линейные системы.*

ON THE HYERS-ULAM-RASSIAS STABILITY OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH GENERALIZED IMPACT ON THE RIGHT-HAND SIDE AND WITH DELAY

GredasovaN.V.*, Pavlenko V., SesekinA.N.***, Shuliaeva K.S. ******

** Ural Federal University, Russia, Yekaterinburg, gredasonan@mail.ru*

***Ural Federal University, Russia, Yekaterinburg, vera.pavlenko.99@mail.ru*

****Ural Federal University, Russia, Yekaterinburg,sesekin@list.ru*

*****Ural Federal University, Russia, Yekaterinburg, shuliaeva32@gmail.com*

For linear differential equations of the first order with a generalized action on the right side and with delay, a formalization of the concept of stability according to Hyers-Ulam-Rassias is proposed. Two types of differential equations are considered and the fact of such stability for these equations is established.

Key words*: Hyers-Ulam-Rassias stability, generalized action, delay, linear systems.*

Введение

В работе рассматриваются свойство условия устойчивости по Хайерсу-Уламу-Рассиасулинейных дифференциальных с обобщенным воздействием – обобщенной производной функции ограниченной вариации – и запаздыванием в фазовой координате.Вопрос об устойчивости дифференциальных уравнений по Хайерсу-Уламу-Рассиасус абсолютно непрерывными траекториями и с запаздыванием рассматривались, например, в [1]. В настоящей работе правая часть дифференциального уравнения содержит обобщенные воздействия – обобщенные производные функций ограниченной вариации. Поэтому здесь решения строятся с помощью замыкания множества гладких аппроксимаций решений в пространстве функций ограниченной вариации [2, 3]. В [4]рассматривается вопрос об устойчивости по Хайерсу-Уламу решений дифференциальных уравнений с импульсами в формализации решений [5], а здесь используется упомянутая выше формализация решений, описанная в [2,3].Свойство устойчивости по Хайерсу-Уламу для линейных дифференциальных уравнений первого и второго порядка без запаздывания в уравнении рассматривались в [6,7].

Для дифференциальных уравнений понятие устойчивости по Хайерсу-Уламу-Рассиасу определяется следующим образом (см., например, [1])

Определение 1. Уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)) \tag{1}$$

устойчиво по Хайерсу-Уламу-Рассиясу, если существует число $c_f > 0$ такое, что $\forall\, \varepsilon > 0$ и каждого решения неравенства

$$\left|y'(t) - f(t, y(t), y(t-\tau))\right| \le \varepsilon\varphi(t), \quad t \in [a, b]$$

[1*]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант 22-21-00714

существует решение $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее неравенству

$$|y(t) - x(t)| \le c_f \varepsilon \varphi(t) \quad t \in [a, b].$$

В силу того, что если у дифференциального уравнения правая часть является неограниченной, то такое определение не применимо и его следует корректировать.

1. Устойчивость по Хайерсу-Уламу-Рассиясу линейных дифференциальных уравнений первого порядка с запаздыванием

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) + p(t)x(t) + q(t)x(t - \tau) = \dot{v}(t), \tag{2}$$

где $x(t), v(t)$ – скалярные функции времени, $p(t)$ и $q(t)$ –непрерывные функции. Решение уравнения рассматривается на отрезке $[t_0,\ \vartheta]$, начальная функция$\omega(t)$задана на отрезке $[t_0 - \tau, t_0]$. Если функция $v(t)$ является абсолютно непрерывной, то при сделанных предположениях существует единственное решение уравнения (2) на отрезке $[t_0,\ \vartheta]$.

Под решением уравнения (2) в случае, когда $v(t)$ будет функцией ограниченной вариации, будем понимать решение интегрального уравнения

$$x(t) - \omega(t_0) + \int_{t_0}^{t} \big(p(s)x(s) + q(s)x(s - \tau)\big)ds - v(t) = 0. \tag{3}$$

Для определенности будем считать, что $v(t_0) = 0$.

Определение 2. Уравнение (2) устойчиво по Хайерсу-Уламу-Рассиасу, если существует число $c_f > 0$ такое, что $\forall\ \varepsilon > 0$ и каждого решения неравенства

$$|y(t) - \omega(t_0) + \int_{t_0}^{t} \big(p(s)y(s) + q(s)y(s - \tau)\big)ds - v(t)| \le \epsilon\varphi(t)$$

найдется решение $x(t)$ уравнения (3), удовлетворяющее неравенству

$$|y(t) - x(t)| \le c_f \varepsilon \varphi(t) \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

Справедлива

Теорема 1. При сделанных предположениях дифференциальное уравнение (2) устойчиво по Хайерсу-Уламу-Рассиясу

А теперь рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) + \dot{v}(t)x(t) + q(t)x(t - \tau) = f(t). \tag{4}$$

Особенностью этого уравнения является то, если функция $v(t)$ является функцией ограниченной вариации и производные понимаются в обобщенном смысле, то второе слагаемое в этом уравнении содержит некорректную с точки зрения теории обобщенных функций операцию умножения разрывной функции на обобщенную функцию. Под решением в этом случае будем понимать поточечный предел последовательности $x_k(t)$, порожденной последовательностью $v_k(t)$при$k \to \infty$ поточечно сходящейся к $v(t)$, если этот предел не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности.Согласно [3], так определенное решение будет удовлетворять интегральному уравнению

$$x(t) - \omega(t_0) + \int_{t_0}^{t} x(s)dv^c(s) + \int_{t_0}^{t} q(s)x(s - \tau)ds - \int_{t_0}^{t} f(s)ds = 0 \tag{5}$$

Определение 3. Уравнение (4) устойчиво по Хайерсу-Уламу-Рассиасу, если существует число $c_f > 0$ такое, что $\forall\ \varepsilon > 0$ и каждого решения неравенства

$$|y(t) - \omega(t_0) + \int_{t_0}^{t} y(s)dv^c(s) + \int_{t_0}^{t} q(s)y(s - \tau)ds - \int_{t_0}^{t} f(s)ds| \le \epsilon\varphi(t) \tag{6}$$

существует решение уравнения (5), для которого справедливо неравенство

$$|y(t) - x(t)| \le c_f \varepsilon \varphi(t)$$

для любого $t \in [t_0, v]$.

Теорема 3. Дифференциальное уравнение (4) устойчиво по Хайерсу-Уламу-Рассиасу.

Заключение

Проведена формализация понятия устойчивости по Хайерсу-Уламу-Рассиасу для линейных дифференциальных уравнений первого порядка с обобщенными воздействиями в уравнении и с запаздыванием. Установлен факт устойчивости по Хайерсу-Уламу-Рассиасу для линейных дифференциальных уравнений первого порядка в случаях, когда обобщенное воздействие входит аддитивно и в случае, когда обобщенное воздействие умножается на фазовую координату.

Библиография

1. *Zada A, Pervaiz B., Alzabut J., Shah S.O.* Further results on Ulam stability for a system of first-order nonsingular delay differential equations // Demonstratio Mathematica 2020; Vol. 53: P. 225–235.

2. *Zavalishchine S.T., Sesekin A.N.*Dynamic Impulse Systems: Theory and Applications. Dolrbrecht: KluwerAcademicPublishers, 1997. – 233 p.

3. Sesekin A.N., Fetisova Yu.V. Functional Differential Equations in the Space of Functions of Bounded Variation // Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics. 2010. Suppl. 2. pp. S258-S265.

4. *Zada A., Faisal Sh., Li Y.* On the Hyers-Ulam Stability of First-Order Impulsive Delay Differential Equations // Hindawi Publishing Corporation. Journal of Function Spaces. Vol. 2016, ArticleID 8164978, 6 p.

5. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.*Дифференциальныеуравнения с импульсным воздействием. – Киев.: Вища школа, 1987.

6. *Зайнуллина Э.З., Павленко В.С., Сесекин А.Н., Гредасова Н.В.* Об устойчивости по Уламу-Хайерсу решений дифференциальных уравнений первого порядка с обобщенным воздействием // Материалы Воронежской международной весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения–XXXII», Воронеж, 3–9 мая 2021 г. Часть 2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **209**, ВИНИТИ РАН, М., 2022. С. 25–32.

7. *Pavlenko, V., Sesekin,* A.Ulam-Hyers Stability of First and Second Order Differential Equations with Discontinuous Trajectories. В V. N. Tkhai (Ред.),Proceedings of 2022 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), STAB 2022). Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc. 2022.

Bibliography

1. *Zada A, Pervaiz B., Alzabut J., Shah S.O.* Further results on Ulam stability for a system of first-order nonsingular delay differential equations // Demonstratio Mathematica 2020; Vol. 53: P. 225–235.

2. *Zavalishchine S.T., Sesekin A.N.*Dynamic Impulse Systems: Theory and Applications. Dolrbrecht: KluwerAcademicPublishers, 1997. – 233 p.

3. *Sesekin A.N., Fetisova Yu.V.* Functional Differential Equations in the Space of Functions of Bounded Variation // Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics. 2010. Suppl. 2. pp. S258-S265.

4. *Wang J.R., Feckan M., Zhou Y.*Ulam's type stability of impulsive ordinary differential equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2012. Vol. 395, No. 1. P. 258–264.

5. *Samoilenko A.M., Perestyuk N.A.* Impulsive Differential Equations, World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A: Monographs and Treatises, vol. 14, World Scientific, New Jersey, 1995. 472 p.

6. *Zainullina E.Z., Pavlenko V.S., Sesekin A.N., Gredasova N.V.* On the Ulam-Hayers stability of solutions of first-order differential equations with generalized action // Proceedings of the Voronezh International Spring Mathematical School "Modern Methods of the Theory of Boundary Value Problems. Pontryagin Readings – XXXII", Voronezh, May 3–9, 2021 Part 2, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Modern mat. and her app. Subject. Obz., 209, VINITI RAN, Moscow, 2022. – P. 25–32.

7. *Pavlenko, V., Sesekin, A.*Ulam-Hyers Stability of First and Second Order Differential Equations with Discontinuous Trajectories. В V. N. Tkhai (Ред.)(Proceedings of 2022 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), STAB 2022). Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc. 2022.

УДК 372.851

DOI 10.53980/9785907599970_75

ПРОБЕЛЫ В ШКОЛЬНЫХ ЗНАНИЯХ И НАВЫКАХ У ПЕРВОКУРСНИКОВ: ДИАГНОСТИКА И СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ

Гриншпон И.Э.*, Гриншпон Я.С.**
**Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Россия, Томск, irina-grinshpon@yandex.ru*
***Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, Томск, grinshpon@mail.ru*

Обучение в университете опирается на знания и навыки, которые должны быть усвоены в школе. Для определения уровня владения этими базовыми математическими умениями проводится входное тестирование первокурсников. В работе представлен опыт авторов по составлению заданий и комплектованию вариантов такого тестирования, анализу его результатов и способам устранения выявленных пробелов как при контактной работе со студентами, так и в рамках их самостоятельной подготовки.
Ключевые слова: *входное тестирование, анализ ошибок, пробелы в школьных знаниях и навыках.*

GAPS IN SCHOOL KNOWLEDGE AND SKILLS FORFRESHMEN DIAGNOSTICS AND WAYSOF SOLUTION

Grinshpon I.E.*, GrinshponYa.S.**
**TomskSate UniversityofControlSystemsandRadioelectronics, Russia, Tomsk, irina-grinshpon@yandex.ru*
***National ResearchTomsk State University, Russia, Tomsk, grinshpon@mail.ru*

University studies is based on the knowledge and skills that should be learned at school. To determine the level of proficiency in these baseline mathematical skills, we carry out an input test forfreshmen. The paper presents the experience of the authors in creating tasks and formingsets of tasks for the test, in analyzing its results and ways to eliminate the identified gaps both in contact work with students and as part of their independent training.
Keywords:*inputtest, analysisofmistakes,gaps in school knowledge and skills.*

Для успешного освоения программ по математическим дисциплинам в университете студент-первокурсник должен обладать определенным объемом элементарных математических знаний и навыков. Выявить величину этого объема, понять, какие темы не усвоены или недостаточно усвоены в школе, на что нужно обратить внимание при преподавании математики и понять, как ликвидировать эти пробелы в университетском курсе, помогает входное тестирование первокурсников.

Варианты предлагаемого нами входного тестирования состоят из 12 заданий по основным разделам элементарной математики. Все тестовые задания имеют открытую форму.

Ниже приведены темы предлагаемых тестовых заданий:

вычисление значения арифметического выражения;
построение графика линейной или квадратичной функций;
преобразование выражения с модулем; решение уравнения или неравенства с модулем;
решение дробно-линейного неравенства;
решение иррационального уравнения;
решение показательного неравенства;
решение логарифмического уравнения;
решение логарифмического неравенства;
преобразование тригонометрического выражения;
решение тригонометрического уравнения;
задача на составление уравнения;

задание с параметром на исследование корней квадратного уравнения или неравенства.

Студент должен привести полное решение задачи. Тематика заданий, включенных в тест, соответствуют заданиям единого государственного экзамена, но иногда отличается по формулировкам. Как и на едином государственном экзамене общий балл за решение всех задач теста составляет 100 баллов. Так как тестирование проводится на одном из первых занятий по математике в университете, то тестирующимся предоставляется справочный материал, содержащий основные формулы, необходимые для решения теста. Для объективного оценивания результатов тестирования для каждого задания разработаны критерии его оценивания. Время выполнения теста 100 минут (одна пара).

Результаты входного теста у большинства первокурсников значительно ниже баллов, полученных ими на ЕГЭ (в среднем, около 60% от баллов ЕГЭ).

Результаты тестирования позволяют сделать выводы о наличии комплексных проблем в уровне математической подготовки выпускников российских школ:

шаблонность мышления, растерянность при непривычнойформулировке условия задачи или присутствии избыточной информации в условии;

беспомощность при использовании справочного материала (особенно, на бумажных носителях информации);

неспособность полно и четко записать решение задания, так как в первой и второй части ЕГЭ требуется только записать ответ, и именно такоеумение оформления заданий сформировано в школе в рамках подготовки к ЕГЭ;

затруднения при составлении математической модели в задачах, формулируемых в текстовой форме;

неудовлетворительное понимание понятия«процент», это касается задач на смеси и сложные проценты при изменении цены товара (большинство первокурсников решают только задачи на кредиты, изучению которых, со слов студентов, уделяется внимание на дополнительных занятиях по математике);

кратковременное запоминание учащимися изучаемого материала, забывание основных идей и правил после сдачи экзамена;

неглубокие знания основных приемов решения геометрических задач (и планиметрических и стереометрических), неумение строить информативно ясные чертежи;

формальное изучение (а иногда, и полное неизучение) в школе тех разделов школьного курса, которые не отражены или слабо отражены в КИМах ЕГЭ.

Рассмотрим основные типы задач, при решении которых допускается наибольшее количество ошибок, что характеризует недостаточное усвоение школьниками этих разделов элементарной математики.

I. Раскрытие модулей. Решение уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля. Так как в первой части ЕГЭ ответом должно быть число, то задание, ответ в котором содержит переменную, приводит студентов в замешательство.

II. Решение иррациональных уравнений вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$. Наиболее часто встречающаяся при решении таких уравнений ошибка – это потеря условия на знак правой части уравнения и отсутствие в этом случае проверки. Проверяется только неотрицательность подкоренного выражения.

III.Применение при решении неравенств правила «знакочередования», когда часть множителей входит в выражение в степени выше первой. Так в следующих примерах применение правила знакочередования приводит к приобретению посторонних решений (пример 1) или потере решений (пример 2). Стоит отметить, что подобная ситуация достаточно часто встречается в вариантах ЕГЭ при решении логарифмического или показательного неравенства.

Пример 1. Решите неравенство $(x^2 - 5x)(x-3)^2 < 0$. Ответ: $x \in (-5; 0) \cup (0; 3)$.

Пример 2. Решите неравенство $(x^2 + 5x)(x-3)^2 \le 0$ Ответ: $x \in [-4; 0] \cup \{3\}$.

IV. Включение в решение строгих неравенств посторонних корней или отбрасывание изолированных корней в нестрогих неравенствах.

V. Решение дробно-линейных неравенств. Стандартная ошибка – умножение на знаменатель – встречается более чем в половине работ. Следовательно, навык решения дробных неравенств на уроках математики недостаточно сформирован.

VI. Преобразование простейших тригонометрических выражений с применением основного тригонометрического тождества и формул приведения. В этих заданиях при вычислении значения

тригонометрической функции рассматривается арифметический корень и часто теряется знак. Важно отметить, что часть студентов незнает следствий из основного тригонометрического тождества, что приводит к необоснованно длинному решению заданий на преобразование тригонометрических выражений.

VII. Потеря смены знака неравенства при решении показательных и логарифмических неравенств, неполное описание области допустимых значений при решении логарифмических неравенств. Вот типичный пример, в котором такая ошибка допускается

Пример 3. Решите уравнение $\log_x(x^2-2x+2)=1$.

В этом примере область допустимых значений логарифма часто записывается не полностью: ($x^2-2x+2>0$) и теряются условия на основания логарифма ($x>0,\ x\neq 1$). В ответе записывается посторонний корень *x* = 1.

VIII. Неверное построение математической модели для текстовой задачи.Если в задачах на движение модель строится верно, то это нельзя сказать о задачах на совместную работу.

Приведем пример задачи, достаточно простой по формулировке, но вызывающей трудности при построении модели.

Пример 4. Две трети пути автомобиль проехал со скоростью 60 км/ч, а остальной путь – со скоростью 45км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всем пути.

В этой задаче достаточно часто среднюю скорость вычисляют как среднее арифметическое скоростей на участках пути, забывая, что участки движения с постоянной скоростью различны. Решение данной задачи:так как время движения $t=\frac{2S}{3\cdot 60}+\frac{S}{3\cdot 45}=\frac{S}{90}+\frac{S}{135}=\frac{5S}{270}=\frac{S}{54}$, то средняя скорость $v=\frac{S}{t}=54$ (км/ч).

IX. Наиболее сложным для первокурсников является задание с параметром. Многие студенты даже не приступают к решению данной задачи, несмотря на то что в тесте предлагается задача на исследование квадратного трехчлена, который достаточно полно изучается в школе.

По результатам входного тестирования принимаются решения о необходимости повторения конкретных математических тем в университетских математических курсах.

Для решения проблемы дефицита школьных знаний и навыков у первокурсников мы применяем следующие образовательные технологии:

проведение обзорных занятий по элементарной математике на парах, специально выделенных для самостоятельной работы студентов;

регулярное консультирование студентов по вопросам, связанным с элементарной математикой;

изучения студентами пособия [1] с кратким изложением основ элементарной математики и большим числом разобранных ключевых задач;

решение студентами индивидуального задания по элементарной математике с последующим анализом допущенным ошибок;

подбор и разработка специальных заданий по математическим дисциплинам, изучаемым в вузе, выполнение которых требует владения как изучаемым на занятии материалом, так и материалом, изученным когда-то в школе.

Вот несколько примеров, при решении которых необходимо применять навыки, полученные в школе на уроках математики.

Пример 5. Решите неравенство $\begin{vmatrix} \frac{x-2}{x+1} & x \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} \le 0$.

Пример 6. Постройте график функции $y=\begin{cases} x^2-8x-13, & \text{if } x\le -2; \\ |x-3|-1, & \text{if } x>-2. \end{cases}$

Пример 7. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-11x+10}{\sqrt{4x+1}-3}$.

Пример 8. Вычислите интеграл $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^6 x}\,dx$.

При работе по этой теме полезно использовать следующую литературу [2], [3], [4],[5], [6].

Библиография

1.*Гриншпон И.Э., Гриншпон Я.С.* Элементарная математика для студентов (адаптационный курс). Учебноепособие // Томск: ТУСУР, 2020, 154 с.

2. *Гриншпон И. Э., Гриншпон Я.С.* Функции и графики: учебно-методическое пособие (для студентов физико-математических, технических и естественнонаучных специальностей) //Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2018, 109 с.

3. *Кытманов А.М., Лейнартас Е.К., Мысливец С.Г.*Математика. Адаптационный курс: учебное пособие // ЗЕНШ при СФУ, Красноярск ИПК СФУ, 2009, 196 с.

4. *Анисимова Н.П., Ванина Е.А.* Практикум. Адаптационный курс по математике. // Санкт-Петербург:Санкт-Петербургский филиал университета «Высшая школа экономики», 2014. – 200 с.

5. *Астахова И.С.* О входном тестировании и учебной адаптации первокурсников при изучении математических дисциплин.//Вестник Псковского государственного университета. Естественные и физико-математические науки. 2016. − №9.– С. 127-129.

6. *Свиридов В.В., Чудинский Р.М., Кочукова М.В.* Педагогическая модель контроля остаточных знаний студентов по естественнонаучным дисциплинам. // Современные проблемы науки и образования. 2021.− № 1.− Режим доступа: https://science-education.ru/ru/article/view?id=30524

Bibliography

1. *Grinshpon I.E., Grinshpon Ya.S.* Elementarymathematicsforundergraduates (adaptive course). Handbook. // Tomsk: TUSUR, 2020, 154 p.

2. *Grinshpon I.E., Grinshpon Ya.S.* Functionsandgraphs: handbookforundergraduatesinphysics, mathematicsand engineering) // Tomsk: Publishing house of Tomsk State University, 2018, 109 p.

3. *Kytmanov A.M., Leinartas E.K., Myslivets S.G.*Mathematics. Adaptivecourse: handbook // ZENSH ofSFU, KrasnoyarskIPK SFU, 2009, 196 p.

4. *Anisimova N.P.,Vanina E.A.*Workbook. Adaptivecourseinmath // Saint-Petersburg: Saint-Petersburg branch of Higher School of Economics, 2014. – 200 p.

5. *Astakhova I.S. Oninputtestingandlearningadaptationfreshmenduringstudying mathematical subjects.* // Pskov State University Bulletin. Natural, physical and mathematical sciences. 2016. − №9. – P. 127-129.

6. *Sviridov V.V., CHudinskii R.M., Kochukova M.V.* Pedagogicalmodelofresidual knowledge controlfor undergraduates in natural sciences. // Modern problems of science and education.2021. − № 1.− https://science-education.ru/ru/article/view?id=30524

УДК 517.97.7

DOI 10.53980/9785907599970_79

КАНОНИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ИМПУЛЬСНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ДЛЯ АВТОНОМНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ[1*]

Долгий Ю.Ф.
Уральский федеральный университет, Россия, Екатеринбург
jury.dolgy@urfu.ru

При оптимальной стабилизации автономной линейной системы дифференциальных уравнений с последействием и импульсными управлениями используется постановка задачи в функциональном пространстве состояний. Для системы с последействием применяются аппроксимирующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений, предложенные С.Н. Шимановым и Дж. Хейлом. Предлагается метод построения приближений для оптимального стабилизирующего управления автономной линейной системы с последействием и импульсными управлениями. При нахождении приближенных управлений используются матричные уравнения Риккати.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение с последействием, каноническая аппроксимация, оптимальная стабилизация, импульсное управление.*

CANONICAL APPROXIMATION OF THE OPTIMAL PULSE STABILIZATION PROBLEM FOR AN AUTONOMOUS LINEAR SYSTEM WITH AFTEREFFECT

Dolgii Yu.F.
Ural Federal University, Russia, Yekaterinburg, jury.dolgy@urfu.ru

For optimal stabilization of an autonomous linear system of differential equations with aftereffect and pulse controls, the formulation of the problem in the functional state space is used. For a system with aftereffect, approximating systems of ordinary differential equations are used, proposed by S.N. Shimanov and J. Hale.A method for constructing approximations for optimal stabilizing control of an autonomous linear system with aftereffect and pulse controls is proposed. Matrix Riccati equations are used to find approximating controls.

Key words*: differential equation with aftereffect, canonical approximation, optimal stabilization, impulse control.*

Введение

Канонические аппроксимации применялись в задаче оптимальной стабилизации систем дифференциальных уравнений с последействием и не импульсными управлениями в работах Н.Н. Красовского, Ю.С. Осипова, С.Н. Шиманова, Е.М. Маркушина, L. Pandolfi, R. Rabah. Ю.Ф. Долгий и А.Н. Сесекинв задаче оптимальной импульсной стабилизации использовали конечномерные аппроксимации дифференциального уравнения с последействием, предложенные Н.Н. Красовским. В настоящей работе при построении приближений для оптимального импульсного стабилизирующего управления используются канонические аппроксимации дифференциального уравнения с последействием.

Постановка задачи

Объект управления описывается автономной линейной системой дифференциальных уравнений споследействием и импульсными управлениями

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\tau}^{0} d\eta(\vartheta)\, x(t+\vartheta) + Bu. \tag{1}$$

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (Проект № 22-21-00714).

Здесь $t \in \mathbb{R}^{+} = (0,+\infty)$, $x:[-\tau,+\infty) \to \mathbb{R}^{n}$, η –матричнозначная функция с ограниченной вариацией на отрезке $[-\tau,0]$, $\eta(0) = 0_{n\times n}$, B –матрица размерности $n \times r$. Импульсные управления являются обобщенными функциями, определяемыми формулами $u(t) = \dfrac{dv(t)}{dt}$, $t \in \overline{\mathbb{R}}^{+}$, в которых импульсы управления $v:[0,+\infty) \to \mathbb{R}^{r}$ имеют ограниченные вариации на любом конечном отрезке положительной полуоси, $v(0) = 0_r$. В задаче оптимальной стабилизации требуется найти импульсное управление, формируемое по принципу обратной связи, которое обеспечивает устойчивую работу системы и минимизирует заданный критерий качества переходных процессов

$$J = \int_0^{+\infty} \left(x^T(t) C_x x(t) + v^T(t) C_v v(t) \right) dt, \tag{2}$$

где C_x, C_v –положительно определенные матрицы. В настоящей работе находятся приближения для оптимального импульсного стабилизирующего управления.

Основной результат

В функциональном пространстве состояний $\mathbf{H} = L_2\left([-\tau,0), \mathbb{R}^{n}\right) \times \mathbb{R}^{n}$ системе (1) соответствует дифференциальное уравнение

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_t + \mathbf{B}u, \quad t \in \mathbb{R}^{+},$$

где замкнутый неограниченный оператор $\mathbf{A}:\mathbf{H} \to \mathbf{H}$ определяется формулами

$$(\mathbf{A}\mathbf{x})(\vartheta) = \frac{d\mathbf{x}(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad \vartheta \in [-\tau,0), \quad (\mathbf{A}\mathbf{x})(0) = \int_{-\tau}^{0} d\eta(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)$$

$D(\mathbf{A}) = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} \in W_2^1\left([-\tau,0), \mathbb{R}^{n}\right) \right\}$ и имеет область определения ,а ограниченный оператор $\mathbf{B}:\mathbb{R}^{r} \to \mathbf{H}$ –формулами

$$\mathbf{B}u(\vartheta) = 0, \quad \vartheta \in [-\tau,0), \quad \mathbf{B}u(0) = \mathrm{B}u, \quad u \in \mathbb{R}^{r}.$$

Критерий качества переходных процессов (2) в функциональном пространстве состояний описывается формулой

$$\mathbf{J} = \int_0^{+\infty} \left((\mathbf{C}_x \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t) + v^T(t) \mathrm{C}_v v(t) \right) dt$$

с ограниченным оператором $\mathbf{H}_x :\ \mathbf{H} \to$, где $(\mathbf{C}_x\mathbf{x})(\vartheta) = 0$, $\vartheta \in [-\tau,0)$, $(\mathbf{C}_x\mathbf{x})(0) = \mathrm{C}_x\,\mathbf{x}(0)$.

Используя комплексификацию пространства $\mathbf{H}$, будем рассматривать скалярное произведение $(\mathbf{H}\mathbf{x}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^*(0)\mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^{0} \mathbf{y}^*(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)\,d\vartheta$, $\mathbf{x},\mathbf{y} \in$.

Рассмотрим конечное множество σ_N собственных чисел оператора $\mathbf{A}$, содержащее все его собственные числа с положительными действительными частями, и соответствующее ему объединение $\mathbf{H}^N \subset \mathbf{H}$ корневых подпространств этого оператора.Натуральное число N совпадает с размерностью подпространства.Проектор $\mathbf{P}_N \left(\mathbf{P}_N\mathbf{H} = \mathbf{H}^N \right)$ задает каноническое разложение пространства $\mathbf{H}$ в прямую сумму. Представление проектора можно записать, используя резольвенту оператора $\mathbf{A}$.При построении канонических аппроксимаций для задачи оптимальной импульсной стабилизации используется схема проекционного метода.Описывается сужение аппроксимационнойзадачи импульсной стабилизации на подпространство $\mathbf{H}^N$.Пространство $\mathbf{H}^N$ топологически изоморфно евклидовому пространству $\mathbb{C}^N$ над полем комплексных чисел. Используя

отображение $\pi_N : \mathrm{H}^N \to £^N$, определяющее топологическийизоморфизм, можно перейти к эквивалентнойаппроксимационной задаче импульсной стабилизации в подпространстве $£^N$

$$\frac{dy}{dt} = \mathrm{A}^N y + \mathrm{B}^N u$$

с критерием качества

$$J_N = \int_0^{+\infty} \left(y^*(t) \mathrm{C}_x^N y(t) + v^T(t) \mathrm{C}_v v(t) \right) dt.$$

Для описания представления оператора π_N используются базисы пространства $\mathbf{H}^N$ и сопряженного к нему пространства. При нахождении приближения оптимального импульсного стабилизирующего управления для автономной линейной системы дифференциальных уравнений с последействием используется метод, предложенный в работе [4]. Он позволяет свести задачу к нахождению решения матричного уравнения Риккати для вспомогательной конечномерной задачи оптимальной не импульсной стабилизации.

Теорема. Пусть матричное уравнение Риккати вспомогательной конечномерной задачи оптимальной не импульсной стабилизации имеет единственное положительно определенное решение K^N.Тогда управление, определяемое формулой

$$u^N(t,\varphi) = -\mathrm{C}_{vv}^{-1} \mathrm{B}^{N*} \left(\mathrm{A}^{N*} \mathrm{K}^N + \mathrm{C}_x^N \right) \left(\mathrm{A}^N \pi_N x(t+\cdot,\varphi) + \pi_N \varphi \delta(t) \right), \quad t \geq 0, \varphi \in \mathbf{H},$$

является стабилизирующим для автономной линейной системы дифференциальных уравнений с последействием (1).Здесь $x(t+\vartheta,\varphi)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$–отрезок обобщенного решения системы (1) с начальной функцией $\varphi \in \mathbf{H}$, $\delta(\cdot)$–функция Дирака, $\mathrm{C}_{vv} = \mathrm{C}_v + \mathrm{B}^{N*} \mathrm{C}_x^N \mathrm{B}^N$.

Заключение

Построены приближения оптимального импульсного стабилизирующего управления для автономной линейной системы дифференциальных уравнений с последействием.

Библиография

1. *Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.*О стабилизации управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АНСССР. Техн. кибернетика. 1963. − № 6. – С. 3-15.

2. *Быков Д.*С., *Долгий Ю.Ф.* Канонические аппроксимации в задаче оптимальной стабилизации автономных систем с последействием // Труды Института математики и механики. 2011. − Т.17, № 2. − С. 20-34.

3. *Долгий Ю.Ф., Сесекин А.Н.* Исследование регуляризации вырожденной задачи импульсной стабилизации системы с запаздыванием // Труды Института математики и механики. 2022. − Т. 28, № 1. − С. 74-95.

4. *Dolgii Y.* Approximation of the problem of optimal impulse stabilization for an autonomous linear system with delay// Proceedings of 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitsky's Conference). STAB 2022. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.

Bibliography

1. *Krasovskii N.N., OsipovYu.S.* On stabilization of a controlled object with a delay in the control system // Izvestia of the USSR. Technical cybernetics.1963. – No. 6. – P. 3-15.

2. *Bekov D.*S., *DolgiiYu.F.* Canonical approximations in task of optimal stabilizations of autonomous systems with aftereffect //Trudy InstitutaMatematikiiMekhanikiUrO RAN. 2011. -- Vol. 17, No. 2. P. 20-34.

3. *DolgiiYu.F., Sesekin A.N.*Regularization of the degenerate problem of stabilization of impulsive systems with time delay//Trudy InstitutaMatematikiiMekhanikiUrO RAN. 2022. -- Vol. 28, No. 1. P.74-95.

4. *Dolgii Y.* Approximation of the problem of optimal impulse stabilization for an autonomous linear system with delay// Proceedings of 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitsky's Conference). STAB 2022. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.

УДК 517.977

DOI 10.53980/9785907599970_82

УСЛОВИЯ УЛУЧШЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМАХ

Думнов В.А.*, Булдаев А.С.**
** Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Россия, Улан-Удэ, uuvladdum@gmail.com*
*** Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Россия, Улан-Удэ, buldaev@mail.ru*

Рассматривается класс дискретно-непрерывных управляемых систем, описываемых дифференциальными уравнениями с кусочно-постоянными управлениями. Конструируются условия нелокального улучшения управления в форме задач о неподвижной точке. Строятся итерационные методы решения задач о неподвижной точке для улучшения управления и методы построения релаксационных последовательностей управлений. Предлагаемые методы обладают свойством нелокальности последовательных приближений управления и отсутствием процедуры параметрического поиска улучшающего управления, характерной для известных градиентных методов.

Ключевые слова: *дискретно-непрерывная система, кусочно-постоянное управление, условия улучшения управления, задача о неподвижной точке, итерационный метод.*

CONTROL IMPROVEMENT CONDITIONS AND OPTIMIZATION METHODS IN DISCRETE CONTINUOUS SYSTEMS

Dumnov V.A.*, Buldaev A.S.**
** Buryat State University, Russia, Ulan-Ude, uuvladdum@gmail.com*
*** Buryat State University, Russia, Ulan-Ude, buldaev@mail.ru*

A class of discrete-continuous control systems is considered, which are described by differential equations with piecewise constant controls. Conditions for nonlocal improvement of control are constructed in the form of fixed point problems. Iterative methods for solving fixed point problems for improving control and methods for constructing relaxation sequences of controls are constructed. The proposed methods have the property of nonlocality of successive approximations of control and the absence of a parametric search procedure for improving control, which is typical for known gradient methods.

Keywords*: discrete-continuous system, piecewise constant control, control improvement conditions, fixed point problem, iterative algorithm.*

Введение

Рассматривается класс дискретно-непрерывных задач оптимального управления на основе кусочно-постоянных аппроксимаций управления. Такие задачи могут рассматриваться в качестве эффективного инструмента исследования и поиска приближенно-оптимальных решений непрерывных задач. Кроме того существует ряд задач, в частности, в области моделирования управления летательными и космическими аппаратами или управления электропоездами, в которых управление технически может быть реализуемо лишь с дискретным регулированием силы тяги. Задачи рассматриваемого класса обычно решаются на основе методов градиентного типа, применяемых для эквивалентных конечномерных задач в пространстве управляющих параметров [1-4].

В настоящей работе предлагаются новые методы оптимизации управления на основе представления условий улучшения управления в форме задач о неподвижной точке. Предлагаемые методы являются аналогами методов неподвижных точек, разработанных в классах непрерывных управляемых систем [5,6].

1. Условия улучшения управления и методы оптимизации

Рассматривается задача оптимального управления:

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x(t),u(t),t)dt \to \inf_{u\in V}, \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t),\ x(t_0) = x^0,\ u(t) \in U \subset R^m,\ t \in T = [t_0,t_1], \tag{2}$$

в которой функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на R^n, функции $f(x,u,t)$, $F(x,u,t)$ и их частные производные являются непрерывными на множестве $R^n \times U \times T$ по совокупности переменных x, u. Функция $f(x,u,t)$ удовлетворяет условию Липшица по x в $R^n \times U \times T$ с константой $L > 0$: $\|f(x,u,t) - f(y,u,t)\| \le L\|x - y\|$. Для допустимых управлений $u(t) = (u_1(t),...,u_m(t))$ рассматривается множество V кусочно-постоянных векторных функций, определенных на интервале T с заданным разбиением на непересекающиеся интервалы узлами сетки $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_N = t_1$. Управление $u(t)$ принимает постоянное значение $u_k = (u_{1k},...,u_{mk}) \subset U$ на каждом интервале $T_k = [\theta_{k-1},\theta_k)$, $k = \overline{1,N}$. Множество $U \subset R^m$ является компактным и выпуклым. Начальное состояние x^0 и интервал T фиксированы.

Обозначим через $u(\cdot)$ - допустимое управление в задаче (1), (2) со значениями $u(t) = u_k$, $t \in T_k$, $k = \overline{1,N}$. Каждому допустимому управлению $u(\cdot) \in V$ взаимно однозначно соответствует N-мерный набор m-мерных векторов $u = \{u_1,...,u_N\}$, $u_k \in U$, $k = \overline{1,N}$. Обозначим через Ω - множество допустимых наборов. Задачу (1), (2) можно рассматривать как специальную задачу математического программирования, для которой требуется определить набор векторов $u = \{u_1,...,u_N\}$ на заданном разбиении интервала T на N непересекающихся интервалов таким образом, чтобы достигался минимум целевой функции:

$$I(u) = \varphi(x(t_1)) + \sum_{k=1}^{N} \int_{T_k} F(x(t),u_k,t)dt \to \inf_{u=\{u_1,...,u_N\}\in\Omega}. \tag{3}$$

Значения фазовых траекторий $x(t),\ t \in T_k,\ k = \overline{1,N}$ определяются последовательным интегрированием системы (2) на интервалах разбиения T_k при $u(t) = u_k,\ t \in T_k,\ k = \overline{1,N}$.

Функция Понтрягина с сопряженной переменной ψ и стандартная сопряженная система в задаче (1), (2) имеют вид:

$$H(\psi,x,u,t) = \langle \psi, f(x,u,t)\rangle - F(x,u,t), \qquad \psi \in R^n,$$

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t),x(t),u(t),t), \qquad t \in T, \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)). \tag{4}$$

Для допустимого управления $v(\cdot) \in V$ обозначим $x(t,v)$, $t \in T$ - решение системы (1); $\psi(t,v)$, $t \in T$ - решение стандартной сопряженной системы (4) при $x(t) = x(t,v)$, $u(t) = v(t)$.

Рассмотрим модифицированную дифференциально-алгебраическую сопряженную систему с дополнительной фазовой переменной $y(t) = (y_1(t),...,y_n(t))$:

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t),x(t),\omega(t),t) - r(t), \tag{5}$$

$$\langle H_x(p(t),x(t),\omega(t),t) + r(t), y(t) - x(t)\rangle = \Delta_{y(t)} H(p(t),x(t),\omega(t),t) \tag{6}$$

с краевыми условиями

$$p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)) - q, \tag{7}$$

$$\langle \varphi_x(x(t_1)) + q, y(t_1) - x(t_1)\rangle = \Delta_{y(t_1)}\varphi(x(t_1)), \tag{8}$$

в которой по определению полагается $r(t) = 0$, $q = 0$ в случае линейности функций f, F по x (линейная по состоянию задача (1), (2)), а также в случае $y(t) = x(t)$ при $t \in T$.

В случае линейной по состоянию задачи (1), (2) система (5)-(8) совпадает со стандартной

сопряженной системой (4). В нелинейной по состоянию задаче (1), (2) уравнения (6), (8) всегда можно аналитически разрешить относительно $r(t)$ и q в виде явных или условных формул (возможно, не единственным образом). Таким образом, дифференциально-алгебраическую сопряженную систему (4) - (7) всегда можно свести (возможно, не единственным образом) к дифференциальной сопряженной системе с однозначно определенными $r(t)$ и q.

Для допустимых управлений $u(\cdot) \in V$, $v(\cdot) \in V$ обозначим $p(t,u,v)$, $t \in T$ - решение модифицированной сопряженной системы (5)-(8) при $x(t) = x(t,u)$, $y(t) = x(t,v)$, $\omega(t) = u(t)$. Из определения следует очевидное равенство $p(t,u,u) = \psi(t,u)$, $t \in T$.

Из формулы приращения целевого функционала в классе кусочно-непрерывных управлений [5] следует формула приращения целевого функционала для кусочно-постоянных управлений в задаче (1), (2), не содержащая остаточных членов разложений:

$$\Delta_v \Phi(u) = -\int_T \Delta_{v(t)} H(p(t,u,v), x(t,v), u(t), t)dt.$$

Для задачи в конечномерной форме (2), (3) формула приращения соответственно принимает вид:

$$\Delta_v I(u) = -\sum_{k=1}^{N} \int_{T_k} \Delta_{v_k} H(p(t,u,v), x(t,v), u_k, t)dt. \tag{9}$$

Из формулы (9) следует, что для улучшения управления в задаче (2), (3) достаточно решить следующую систему уравнений:

$$v_k = \arg\max_{w \in U} \int_{T_k} H(p(t,u,v), x(t,v), w, t)dt, \quad k = \overline{1,N}. \tag{10}$$

Другое условие нелокального улучшения управления можно построить в линейной по управлению задаче (2),(3), в которой формула (9) принимает следующий вид:

$$\Delta_v I(u) = -\sum_{k=1}^{N} \int_{T_k} \left\langle H_u(p(t,u,v), x(t,v), u_k, t), v_k - u_k \right\rangle dt. \tag{11}$$

Обозначим через P_Y – оператор проектирования на множество $Y \subset R^k$ в евклидовой норме:

$$P_Y(z) = \arg\min_{y \in Y}(\|y - z\|), \qquad z \in R^k.$$

Рассмотрим систему уравнений с параметром $\alpha > 0$:

$$v_k = P_U(u_k + \alpha \int_{T_k} H_u(p(t,u,v), x(t,v), u_k, t)dt), \quad k = \overline{1,N}. \tag{12}$$

На основе известного свойства операции проектирования для решения $v = \{v_1, ..., v_N\}$ системы (12) выполняется неравенство:

$$\int_{T_k} \left\langle H_u(p(t,u,v), x(t,v), u_k, t), v_k - u_k \right\rangle dt \geq \frac{1}{\alpha} \|v_k - u_k\|^2.$$

В результате, из формулы (11) следует улучшение управления $u = \{u_1, ..., u_N\}$ с оценкой:

$$\Delta_v I(u) \leq -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{N} \|v_k - u_k\|^2 \tag{13}$$

Полученные условия нелокального улучшения (10) и (12) можно рассматривать как задачи о неподвижной точке в конечномерном пространстве допустимых наборов векторов $v = \{v_1, ..., v_N\}$.

Такое представление дает возможность конструировать новые итерационные алгоритмы для поиска улучшающих управлений.

Для иллюстрации предлагаемого подхода неподвижных точек рассматриваются соответствующие алгоритмы простой итерации для решения задач о неподвижной точке (10) и (12) с начальными приближениями $v^0 \in \Omega$:

$$v_k^{s+1} = \arg\max_{w \in U} \int_{T_k} H(p(t,u,v^s), x(t,v^s), w, t)dt \,, \; k = \overline{1,N} \,, \; s \geq 0 \,. \tag{14}$$

$$v_k^{s+1} = P_U(u_k + \alpha \int_{T_k} H_u(p(t,u,v^s), x(t,v^s), u_k, t)dt) \,, \; k = \overline{1,N} \,, \; s \geq 0 \,. \tag{15}$$

Сходимость указанных итерационных процессов можно анализировать с помощью известного принципа сжимающих отображений.

Для каждого алгоритма (14) и (15) итерации по индексу $s \geq 0$ проводятся до первого строгого улучшения управления $u \in \Omega$ по целевой функции: $I(v^{s+1}) < I(u)$. Далее строится новая соответствующая задача о неподвижной точке для улучшения полученного расчетного управления и итерационный процесс повторяется. Если строгое улучшение управления не происходит, то итерационный процесс проводится до выполнения условия:

$$\left\| v^{s+1} - v^s \right\| \leq \varepsilon \,,$$

где $\varepsilon > 0$ – заданная точность расчета задачи о неподвижной точке. На этом итерации расчета последовательных задач улучшения управления предлагаемыми алгоритмами заканчиваются.

Таким образом, на основе алгоритмов (14) и (15), применяемых для реализации соответствующих условий улучшения управления (10) и (12), формируются методы неподвижных точек для построения релаксационных последовательностей управлений и получения приближенных решений задачи оптимального управления (2), (3).

Заключение

Предлагаемые методы оптимизации на основе построенных условий улучшения управления характеризуются следующими особенностями:

нелокальность последовательных приближений управления на каждой итерации методов;

отсутствие процедуры выпуклого или игольчатого варьирования управления на каждой итерации методов, характерной для градиентных методов;

возможность строгого улучшения управления, удовлетворяющего необходимому условию оптимальности, которая отсутствует в градиентных методах.

Указанные особенности предлагаемого подхода являются важными для повышения эффективности решения дискретно-непрерывных задач оптимального управления.

Библиография

1. *Gorbunov, V.* A method for the parametrization of optimal control problems // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1979. – Vol. 19, No. 2. - P. 292-303.

2. *Teo, K., Goh, C., Wong, K.* A unified computational approach to optimal control problem. New York: Longman Group Limited, 1991. – 348 p.

3. *Rahimov, A.* On an approach to solution to optimal control problems on the classes ofpiecewise constant, piecewise linear, and piecewise given functions // Tomsk State University Journal of Control and Computer Science. 2012. - Vol. 2, No. 19. - P. 20–30.

4. *Srochko, V., Aksenyushkina, E.* Parametrization of some control problems for linear systems // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2019. – Vol. 30. - P. 83-98.

5. *Buldaev A., Khishektueva I.-Kh.* The fixed point method for the problems of nonlinear systems optimization on the managing functions and parameters // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2017. - Vol. 19. - P. 89–104.

6. *Булдаев А.С.* Методы неподвижных точек в задачах оптимизации управляемых систем // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2020. – Т. 183. - С. 22–34.

Bibliography

1. *Gorbunov, V.* A method for the parametrization of optimal control problems // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1979. – Vol. 19, No. 2. – P. 292-303.

2. *Teo, K., Goh, C., Wong, K.* A unified computational approach to optimal control problem. New York: Longman Group Limited, 1991. – 348 p.

3. *Rahimov, A.* On an approach to solution to optimal control problems on the classes ofpiecewise constant, piecewise linear, and piecewise given functions // Tomsk State University Journal of Control and Computer Science. 2012. - Vol. 2, No. 19. – P. 20–30.

4. *Srochko, V., Aksenyushkina, E.* Parametrization of some control problems for linear systems // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2019. – Vol. 30. – P. 83-98.

5. *Buldaev A., Khishektueva I.-Kh.* The fixed point method for the problems of nonlinear systems optimization on the managing functions and parameters // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2017. – Vol. 19. – P. 89–104.

6. *Buldaev A.* Fixed point methods for optimizing control systems // Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz. 2020. – Vol. 183. – P. 22– 34.

УДК 519.85:612.821-056.2

DOI 10.53980/9785907599970_87

ДИНАМИКА СВЯЗАННОГО СО ЗДОРОВЬЕМ КАЧЕСТВА ЖИЗНИ

Дьякович М.П.*, Финогенко И.А.**
** Ангарский государственный технический университет,*
Россия, Ангарск, ***marik914@rambler.ru*** *,*
*** Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН,*
Россия, Иркутск, e-mail: fin@icc.ru,

Разрабатывается метод исследования динамики основных критериев связанного со здоровьем качества жизни (СЗКЖ), основанный на методе анализа иерархий Т. Саати (МАИ). Динамические суждения в матрицах парных сравнений представлены функциями времени.

Ключевые слова: *качество жизни, связанное со здоровьем, метод анализа иерархий, динамические суждения, матрица парных сравнений, векторная функция приоритетов.*

DYNAMIC OF THE HEALTH-RELATAD QUALITY OF LIFE

Diakovich M.P.*, Finogenko I.A.**
**Angarsk State Technical University,*
Russia, Angarsk, ***marik914@rambler.ru***
***Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theoryof SB RA,*
Russia, Irkutsk, fin@icc.ru

A method is being developed to study the dynamics of the main criteria of health-related quality of life (HRQL), based on the method of analysis of hierarchies by T. Saaty (MAH). Dynamic judgments in the matrices of pairwise comparisons are represented as functions of time.

Key words: *health-related quality of life, hierarchy analysis method, dynamic judgments, pairwise comparison matrix, priority vector function.*

Введение

Проблемы исследования критериев связанного со здоровьем качества жизни (СЗКЖ) связаны с многомерностью составляющих его шкал и их разнородностью. Это делает критерии СЗКЖ изначально несравнимыми. Поэтому важным моментом исследований является перевод качественной информации о СЗКЖ в количественную. Это приводит к набору оценок каждого критерия числами, которые образуют вектор приоритетов шкал СЗКЖ. Одним из методов такого исследования является метод анализа иерархий (МАИ), разработанный американским математиком Т. Саати [1].

В настоящее время большой интерес исследователей вызывает не только сравнительный анализ изменений параметров доменов СЗКЖ, но и более глубокий анализ самой динамики СЗКЖ.

Наша цель – построение динамических оценок шкал (критериев) СЗКЖ с использованием основных вычислительных процедур МАИ.

Первым шагом МАИ является построение иерархической структуры исследуемого объекта. В наших исследованиях берем за основу иерархическую модель СЗКЖ, построенную на основе утвержденного Всемирной организацией здравоохранения неспецифического опросника СЗКЖ SF-36, предназначенного как для пациентов, так и для практически здоровых людей. С математической точки зрения иерархическая структура это граф-дерево, в котором элементы СЗКЖ, как системы, распределены по уровням.

В нашей работе мы использовали модель, описанную нами в [2]. Она представлена на рисунке 1, все обозначения можно найти в [2].

Качественные суждения экспертов, полученные на основе парных сравнений критериев СЗКЖ, должны быть преобразованы в их количественные соотношения. Для этого на каждом уровне составляются квадратные матрицы парных сравнений критериев. Вектор $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ весовых коэффициентов (вектор приоритетов) является решением линейного уравнения

$$Aw = \lambda_{\max} w, \tag{1}$$

где $\lambda_{\max}$ – наибольшее собственное значение матрицы A. Исследования уравнения (1) применительно к СЗКЖ проводились авторами в работе [2].

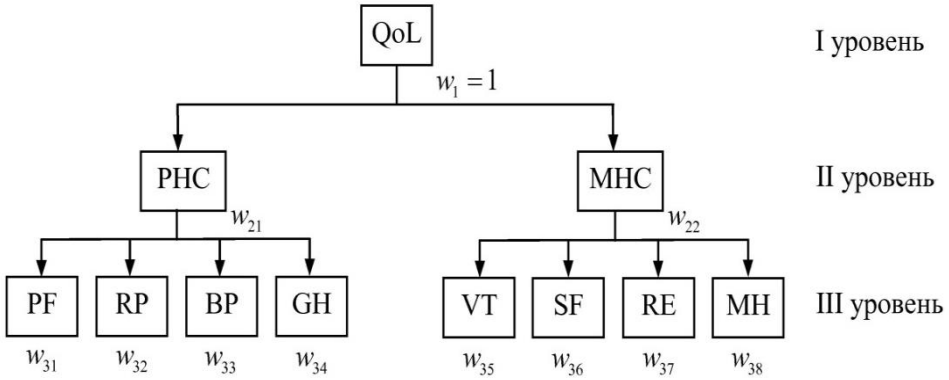


Рисунок 1 – Иерархическая модель СЗКЖ

2. Динамика СЗКЖ с учетом времени

Динамические суждения о шкалах СЗКЖ формируют зависящую от времени матрицу парных сравнений. Но тогда будет меняться собственное число $\lambda_{\max}$ этой матрицы и вектор приоритетов $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$. Таким образом, мы приходим к необходимости решения уравнения

$$A(t)w(t) = \lambda_{\max}(t)w(t). \tag{2}$$

Здесь мы запишем формулы МАИ для матрицы 2×2 для второго уровня иерархии, где нужно сравнивать физическую и социально психическую компоненты СЗКЖ. Эти и другие формулы для матриц порядка 3 и 4 найти в разделе 5.4 из книги [1].

Пусть для описания динамики суждений выбрана функция некоторая функция *a(t).* Для этого случая $\lambda_{\max}(t) \equiv 2$ и, учитывая обратную симметричность матрицы парных сравнений, уравнение (2) записывается в виде:

$$\begin{aligned} &w_1(t) + a(t)w_2(t) = 2w_1(t), \\ &w_1(t)/a(t) + w_2(t) = 2w_2(t). \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда из первого уравнения получаем $w_1(t) = a(t)w_2(t)$. Полагая, например, $w_2(t) = 1$ получаем $w_1(t) = a(t)$. Вектором приоритетов будет вектор $w(t) = (w_1(t), w_2(t))$, определенный из уравнения (3) после нормализации.

Весь жизненный цикл человека разбиваем на периоды и выбираем функцию $a(t)$ для матрицы парных сравнений в виде:

$t \le 20$ – функция $a(t) = 1$ постоянна (юность);

$20 \le t \le 60$ – функция $a(t) = -(t-40)^2/400 + 2$ перевернутая и сдвинутая вправо парабола, достигает максимума, равного 2, при $t = 40$ (молодость, зрелость);

$60 \le t \le 80$ – сдвинутая вправо парабола, достигает минимума, равного *1/2*, при $t = 80$ (зрелость);

$80 \le t$ функция $a(t) = 1/2$ постоянная (старость).

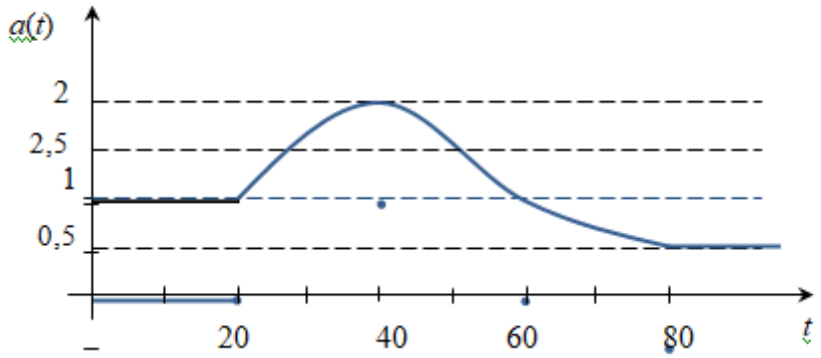


Рисунок 2 – Функция динамических суждений

Из рисунка 2 видно, что в первом периоде физическая и психические компоненты равнозначны, во втором в два раза возрастает доминирование физической компоненты, которое затем уменьшается и в третьем периоде и далее доминирует психическая компонента.

Собственное значение $\lambda_{max}(t)= 2$. Вектор приоритетов (нормированное решение уравнения (3)) определяется равенствами:

$w_1(t) = w\ (t) = 1/2$, $t \le 20$;

$w_1(t) = 1 + 400/((t-40)^2 - 1200)$, $w_2(t) = -400/((t-40)^2 - 1200)$, $20 \le t \le 60$;

$w_1(t) = 1 - 800/((t-80)^2 + 1200)$, $w_2(t) = 800/((t-80)^2 + 1200)$, $60 \le t \le 80$;

$w_1(t) = 1/3$, $w_2(t) = 2/3$, $t \ge 80$.

Графики функций $w_1(t), w_2(t)$ на рисунке 3 делают анализ соотношений шкал физического и психического здоровья достаточно наглядным.

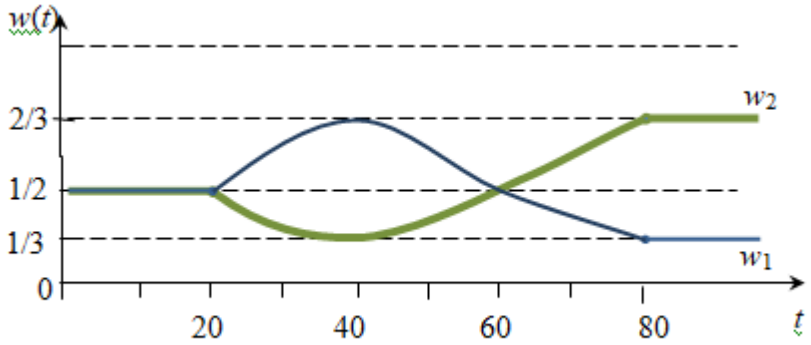


Рисунок 3 – Компоненты вектора приоритетов

Библиография

1. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархи. М.: Радио и связь, 1993. – 278 с.

2. Финогенко И.А., Дьякович М.П., Блохин А.А. Методология оценивания качества жизни, связанного со здоровьем // Вестник ТГУ. 2016. – Т. 21. – Вып. 1. – С. 121-130.

Bibliography

1. Saati T. Decision making. Hierarchy analysis method. M.: Radio and communication, 1993. – 278 p.

2. Finogenko I.A., Dyakovich M.P., Blokhin A.A. The methodology of assessment of health-related quality of life // Vestnik TGU. 2016. – Vol. 21. – Issie 1. – P. 121-130.

УДК 62.752 629.4.015, 628.534, 519.71-74

DOI 10.53980/9785907599970_90

СТРУКТУРНОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ОЦЕНКЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ НА ОСНОВЕ РЫЧАЖНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Елисеев А.В.[*,], Кузнецов Н.К.[**]**

[*]*Иркутский государственный университет путей сообщения,*
Россия, Иркутск, eavsh@ya.ru
[**]*Иркутский национальный исследовательский технический университет,*
Россия, Иркутск, knik@istu.edu

Развиваются методологические основы использования рычажных связей в оценке динамических состояний технических объектов, находящихся в условиях связных кинематических возмущений. Используется методология структурного математического моделирования, основанного на установлении соответствия между механическими колебательными системами, рассматриваемыми в качестве расчётных схем технических объектов, и структурными схемами эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления. Показано, что совокупность динамических состояний механической колебательной системы может быть интерпретирована в рамках рычажных представлений.

Ключевые слова: *Структурное математическое моделирование, механические колебания, связанные возмущения, передаточные функции, рычажные связи, обобщённый рычаг системы с изменённой метрикой, вибрационное нагружение, упругие элементы, связные кинематические возмущения.*

STRUCTURAL MATHEMATICAL MODELING IN THE EVALUATION OF DYNAMIC STATES OF MECHANICAL OSCILLATORY ON THE BASIS OF LEVER REPRESENTATIONS

Eliseev A.V.[*,], Kuznetsov N.K.[**]**

[*]*Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia, eavsh@ya.ru*
[**]*Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia, knik@istu.edu*

Ideas about the use of lever connections in assessing the dynamic states of technical objects under conditions of kinematic disturbances are being developed. The methodology of structural mathematical modeling based on the establishment of correspondence between mechanical oscillatory systems considered as design schemes of technical objects and structural schemes of dynamically equivalent automatic control systems is used.

Key words*: Structural mathematical modeling, mechanical vibrations, coupled perturbations, transfer functions, lever connections, generalized lever of a system with a modified metric, vibration loading, elastic elements, connected kinematic perturbations.*

Проблемы обеспечения безопасности технических объектов требуют разработки междисциплинарных подходов, которые охватывают различные области знания, такие как машиноведение, прикладная и теоретическая механика, теория автоматического управления, теория катастроф и системный анализ [1]. Развитие представлений о факторах риска опасных событий подчеркивает необходимость оценки, контроля и формирования динамических состояний технических объектов, особенно в условиях интенсивных внешних воздействий, включая вибрационные [2]. Получение математических моделей технических объектов, подверженных вибрационным воздействиям, основывается на структурном подходе, который заключается в связи механических колебательных систем в качестве расчетных схем с эквивалентными системами автоматического управления [3]. В данной работе предлагается метод оценки многообразия динамических состояний механических колебательных систем с твердым телом, имеющим три степени свободы. Подход основан на обобщенных представлениях о рычажных связях в системе и учитывает связные вибрационные нагрузки кинематической природы.

Рассматривается механическая колебательная системы, образованная твёрдым телом, расположенным на упругих опорах, совершающих синфазные гармонические колебания. Предполагается, что твёрдое тело совершает малые вынужденные колебания под воздействием связных кинематических возмущений (рис.1, *а*).

(а) (б)

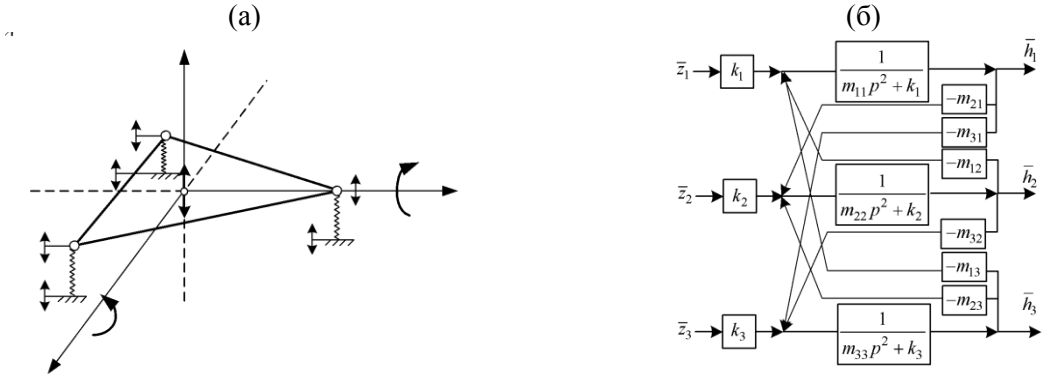


Рисунок 1 – Механическая колебательная система:
(а) – расчетная схема, (б) – структурная схема

На основе структурной схемы (рис.1, б) строятся амплитудно-частотные характеристики передаточных функции системы, отображающие рычажные связи, для которых выходным сигналом служат кинематическое возмущения опорных поверхностей, а выходными – колебания точек твердого тела (рис.2, *а*). Аналитическое представление передаточных функций на основе разложения определителей учитывают коэффициенты связности внешних кинематических возмущений. Для точек твердого тела, обладающих свойствами симметрии, реализуется сокращение степени многочленов в передаточном отношении для оценки динамических состояний.

(а) (б)

(в) (г)

Рисунок 2 – Динамические состояния механической колебательной системы в зависимости от коэффициента связности: (а) – амплитудно-частотная характеристик; (б) – частотная кривиая для определения граничиных совокупностей динамических состояний; (*в*) – количество резонансов в зависимости от коэффитциента свяхности; (*г*) – интегральная характеристика совокупности динамических инвариантов

Построение динамических инвариантов, отображающих существенные особенности динамических взаимодействий, осуществляется на основе частотных кривых (рис.2, *б*). Зависимость динамическим состояний механической колебательной систем от коэффициента связности внешних возмущений отображается с помощью частных (рис.2, *в*) и интегральных характеристик, отображающих общее число динамических особенностей в виде резонансов, режимов обнуления и форм динамических взаимодействий (рис.2, *г*).

Для интерпретации динамических состояния используются представления о рычагах (рис.3, *а*).

Значениям амплитудно-частотных характеристик сопоставляются рычажные отношения (рис.3, *б*). Совокупность значений рычажных отношений, распределенных по интервалам вещественной оси, проецируется на точки окружности (рис.3, *в*). Из дуг окружности, представляющих собой проекции интервалов рычажных отношений, распределенных по вещественной оси, формируется обобщенный рычаг механической колебательной системы (рис.3, *г*). В зависимости от коэффициента связности внешних кинематических возмущений обобщенный рычаг может быть представлен на плоскости (рис.3, *д*) или в пространстве (рис.3, *е*).

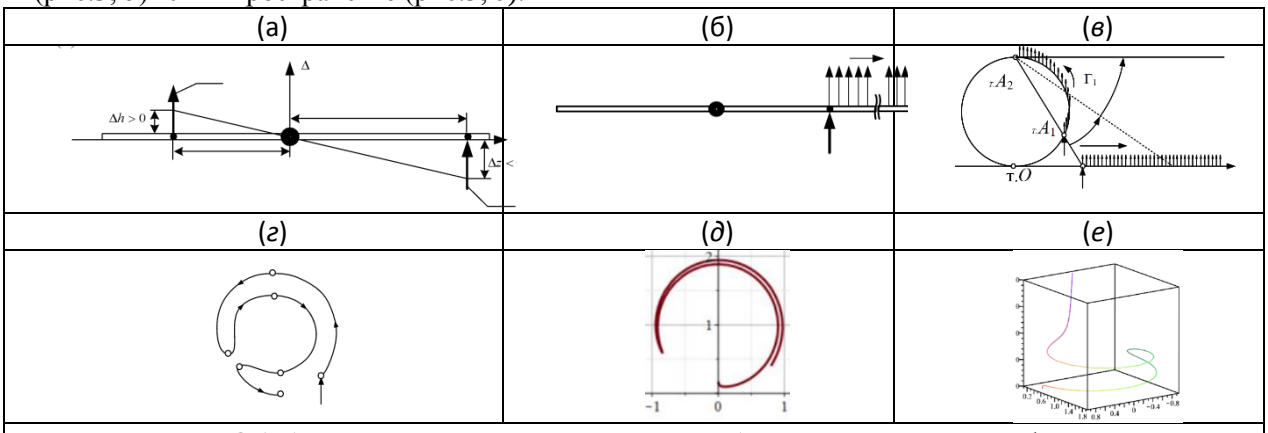


Рисунок 3 – Обобщенный рычаг механической колебательной системы для фиксированного коэффициента связности: (а) – рычаг 1-ого рода; (б) – представление ветви амплитудно-частотной характеристики с помощью рычага; (*в*) –монографическая проекция рычажного отношения на дугу окружности; (*г*) – формирование обобщенного рычага из дуг; (*д*) – обобщенный рячаг системы; (*е*) – пространственное представление обобщенного рычага

Заключение

В рамках методологи структурного математического моделирования развиты представления о механических колебательных системах с учетом рычажных связей. Разработан метод оценки совокупности динамических состояний механической колебательной системы с тремя степенями свободы, находящейся в условиях связных кинематических возмущений. Показано, что совокупность динамических состояний механической колебательной системы может быть представлена в виде обобщенного рычага, обладающего формой и размером, объединяющего совокупность рычажных отношений, определяемых на основе амплитудно-частотных характеристик передаточных функций. По мнению авторов, системный анализ механических колебательных система с помощью рычажных представлений, включая понятия размера и формы рычага, обеспечивают возможность создания новых методов моделирования, технологий и инженерных решений, направленных на оценку, контроль и формирование динамических состояний технических объектов, транспортного и технологического назначения, находящихся в условиях вибрационного нагружения, безопасность которых имеет существенное значение.

Библиография

1. *Москвичев В.В., Махутов Н.А., Шокин Ю.И.* Прикладные задачи конструкционной прочности и механики разрушения технических систем. – Новосибирск: Наука, 2021. – 795 с.

2. *Clarence W. de Silva.* Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton: CRC Press, 2006. – 1064 p.

3. *Eliseev S.V., Eliseev A.V.* Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control, Vol.252, Springer International Publishing, Cham, 2020. – 521 p.

Bibliography

1. *Moskvichev, V.V., Mahutov N.A., Shokin YU.I.* Prikladnye zadachi konstrukcionnoj prochnosti i mekhaniki razrusheniya tekhnicheskih system [Applied problems of structural strength and mechanics of destruction of technical systems]. Novosibirsk: Nauka, 2021. – 795 p.

2. *Clarence W. de Silva.* Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton: CRC Press, 2006. 1064 p.

3. *Eliseev S.V., Eliseev A.V.* Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control, Vol.252, Springer International Publishing, Cham, 2020. – 521 p.

УДК 621.9.026

DOI 10.53980/9785907599970_93

МЕТОД СТРУКТУРНЫХ ОТКЛОНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТАТИКИ ПРОЕКТИРУЕМЫХ МЕХАНИЗМОВ

Елтошкина Е.В.[*], Павлова Е.Б.[**]

** ФГБОУ ВО Иркутский государственный аграрный университет им. А.А. Ежевского, Россия, г. Иркутск, EEV_Baikal2005@mail.ru*
*** ФГБОУ ВО Восточно- Сибирский государственный университет технологий и управления, Россия, г. Улан-Удэ, pavlova2607@mail.ru*

Проектирование механизма с заданными динамическими свойствами связано с необходимостью определения внешних сил или моментов, обеспечивающих требуемое движение каждого звена, а также динамических характеристик механизма с заданным силовым приводом. После определения статических и динамических реакций в кинематических парах механизма возникает задача расчета внешних сил, необходимых для положения равновесия. В данной работе приводится описание обобщенного метода структурных отклонений для решения задач статики проектируемых механизмов, приведены уравнения движения кинематических пар в виде уравнений Лагранжа. Выбирая тип и число связей, геометрические параметры каждого звена, распределения масс, жесткости и коэффициенты демпфирования, можно использовать уравнения движения в решении задач динамики плоских и пространственных механизмов, например, при исследовании малых колебаний многоконтурного механизма с несколькими степенями свободы относительно положения статического равновесия.

Ключевые слова: *проектирование, механизм, задача, структура, динамические свойства.*

STRUCTURAL DEVIATION METHOD FOR SOLVING PROBLEMS OF STATICS OF DESIGNED MECHANISMS

Eltoshkina E.V.*, Pavlova E.B.**

** Irkutsk State Agrarian University A.A. Yezhevsky, Irkutsk, Russia, EEV_Baikal2005@mail.ru*
*** East Siberian State University of Technology and Management, Ulan-Ude, Russia, pavlova2607@mail.ru*

The design of a mechanism with given parameters is associated with the mandatory determination of external forces or moments that require the required movement of each link, as well as the exhaustive characteristics of the mechanism with a given power drive. After the definition and occurrence of sensations in kinematic pairs, the problem arises of identifying a sudden force, sensation for the position of sensation. This paper describes a generalized method of structural deviations for solving problems of statics of designed mechanisms, calculation of the equation of motion of kinematic pairs in the Lagrange representation.By choosing the type and number of links, the geometric parameters of each link, mass distributions, stiffness and damping coefficients, one can use the equations of motion in solving problems of the dynamics of planar and spatial mechanisms, for example, in the study of small oscillations of a multi-loop mechanism with several degrees of freedom relative to the position of static equilibrium.

Keywords: *design, mechanism, task, structure, dynamic properties.*

Введение. Проектирование механизма с заданными динамическими свойствами связано с необходимостью определения внешних сил или моментов, обеспечивающих требуемое движение каждого звена, а также динамических характеристик механизма с заданным силовым приводом [1, 2].

Постановка задачи. После определения статических и динамических реакций в кинематических парах механизма возникает задача расчета внешних сил, необходимых для положения равновесия [3, 4].

Решение задачи. Решение этой задачи можно осуществить методом структурных отклонений. Положение механизма с *W* степенями свободы определяется заданием q_j обобщенных координат $\left(j=\overline{1,m}\right)$. В кинематической паре рассматриваются постоянно действующие силы (для

поступательной кинематической пары), и упругая сила $F_i \left(i = \overline{1,m}\right)$. Сила, действующая в i –й кинематической паре, равна

$$F_i = \sum_{i=1}^{m} \left(P_{ij} - F_{ij}\right), \tag{1}$$

где $F_{ij} = K_{ij}\left(\varphi_j - \varphi_j^0\right)$,

P_{ij} - постоянная сила, действующая вдоль пары i,

φ_j^0 - свободная длина j - ой переменной пары.

Работа A, совершаемая силой F_i в i –й кинематической паре равна

$$A = \sum_{i=1}^{m} (P_{ij} - F_{ij})\Delta\varphi_j, \tag{2}$$

и эквивалентна работе, совершенной обобщенной силой W_{ij} вдоль q_j . Откуда сила, эквивалентная суммарному неуравновешенному действию всех сил, равна

$$W_j = \sum_{s=1}^{l} \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial\varphi_{sr}}{\partial q_i}\left(P_{sr} - F_{sr}\right), \qquad (j = \overline{1,n}),$$

где $m -$ количество кинематических пар механизма, параметры которых зависят от обобщенных координат q_j . Такие уравнения можно записать для каждой обобщенной координаты $q_j \ \left(j = \overline{1,m}\right)$, то есть в результате получаем систему уравнений, которую можно представить в виде матричного уравнения

$$W = R'T, \tag{3}$$

где $W -$ вектор размерности n,

$R' = \dfrac{\partial\varphi_{sr}}{\partial q_j}, (j = \overline{1,n},\ s = \overline{1,l},\ r = \overline{1,n})$ - матрица размерности $n \times n_i$,

$n_i = \sum_{s=1}^{q} r_s$,

$T -$ вектор сил размерности

$r_s -$ размерность $s -$ й кинематической пары.

Изначально, для положения равновесия $W = 0$,

$$R'T = R'(P - F) = 0, \tag{4}$$

тогда получаем, что $R'P = R'F$, а

$$F = K(\varphi - \varphi_0), \tag{5}$$

где K - кинематическая энергия механизма.

В приращениях уравнение (5) примет вид:

$$R'\Delta P = R'\Delta F, \tag{6}$$

где $\Delta F = K\Delta\varphi$.

$$\Delta\varphi = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial q_j} \times \Delta q_j = R\Delta q.$$

Так как,

Тогда, подставляя полученное выражение в (6), получим:

$$R'\Delta P = R'KR\Delta q. \tag{7}$$

Отсюда, решая матричное уравнение, получим решение:

$$\Delta q = (R'KR)^{-1} R'\Delta P. \quad (8)$$

Из соотношения (8) можно проследить изменения обобщенных координат в зависимости от изменения сил.

Матрица R может быть получена из анализа скоростей механизма:

$$R = (M'M)^{-1} MZ,$$

где $Z -$ матрица –вектор правых частей системы при $\varphi_S = q_r$.

После того, как кинематическая и потенциальная энергии кинематической пары выражены через обобщенные координаты и скорости, можно получить уравнения движения в форме уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_S}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_S} = P_S, \; s = \overline{n-m+1,n},$$

где $L -$ функция Лагранжа: $L = K - П;$

$K -$ кинематическая энергия,

$П -$ потенциальная энергия,

$P_S -$ обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_S.

Вывод. Неявная зависимость коэффициентов от обобщенных координат раскрывается путем решения матричных контурных уравнений итерационным методом. Выбирая тип и число связей, геометрические параметры каждого звена, распределения масс, жесткости и коэффициенты демпфирования, можно использовать уравнения движения в решении задач динамики плоских и пространственных механизмов, например, при исследовании малых колебаний многоконтурного механизма с несколькими степенями свободы относительно положения статического равновесия.

Задача сводится к вычислению собственных частот и соответствующих коэффициентов демпфирования в этом положении, а также к определению переходной и установившейся реакцией на малые возмущения.

Библиография

1. *Анисько, Р. С.* Автоматизированное проектирование деталей механизмов / Р. С. Анисько // Современные тенденции в образовании и науке : сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции: в 14 частях, Тамбов, 28 ноября 2014 года. Том Часть 9. – Тамбов: ООО "Консалтинговая компания Юком", 2014. – С. 12-14. – EDN TBVBFR.

2. *Королев, И. А.* К вопросу решения задачи оптимизации геометрических и силовых параметров при исследовании статики и динамики шагающей установки / И. А. Королев // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2022. – № 17-2. – С. 306-315. – DOI 10.26160/2658-3305-2022-17-306-315. – EDN NQYYUJ.

3. *Наумова, А. Н.* Автоматизированное проектирование сборки механизмов сложной пространственной структуры / А. Н. Наумова, С. А. Семенов // Вестник Рыбинской государственной авиационной технологической академии им. П. А. Соловьева. – 2011. – № 3(21). – С. 99-105. – EDN OQRSVN.

4. *Толстошеев, А. К.* Проектирование статически определимых механизмов технологических мехатронных машин с параллельной кинематикой / А. К. Толстошеев, В. А. Татаринцев // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2019. – Т. 20, № 7. – С. 428-436. – DOI 10.17587/mau.20.428-436. – EDN LEGGEZ.

Bibliography

1. *Anisko, R. S.* Computer-aided design of mechanism parts / R. S. Anisko // Modern trends in education and science: a collection of scientific papers based on the materials of the International Scientific and Practical Conference: in 14 parts, Tambov, November 28, 2014. Volume Part 9. - Tambov: Ucom Consulting Company LLC, 2014. - P. 12-14. – EDN TBVBFR.

2. *Korolev, I. A.* On the issue of solving the problem of optimizing geometric and power parameters in the study of statics and dynamics of a walking installation / I. A. Korolev // Transport, mining and construction

engineering: science and production. - 2022. - No. 17-2. - S. 306-315. – DOI 10.26160/2658-3305-2022-17-306-315. – EDN NQYYUJ.

3. *Naumova, A. N.* Automated design of the assembly of mechanisms of a complex spatial structure / A. N. Naumova, S. A. Semenov // Bulletin of the Rybinsk State Aviation Technological Academy. P. A. Solovyova. - 2011. - No. 3 (21). - S. 99-105. – EDN OQRSVN.

4. *Tolstosheev, A. K., Tatarintsev, V. A.* Design of statically determinable mechanisms of technological mechatronic machines with parallel kinematics // Mechatronika, avtomatizatsiya, upravlenie. - 2019. - T. 20, No. 7. - S. 428-436. – DOI 10.17587/mau.20.428-436. – EDN LEGGEZ.

УДК 378.1

DOI 10.53980/9785907599970_97

МЕТОДЫ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Елтошкина Е.В.*, Павлова Е.Б.**

** ФГБОУ ВО Иркутский государственный аграрный университет им. А.А. Ежевского, Россия, г. Иркутск, EEV_Baikal2005@mail.ru*

*** ФГБОУ ВО Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Россия, г. Улан-Удэ, pavlova2607@mail.ru*

В современной высшей школе, в связи с уменьшением аудиторной нагрузки, учебный процесс все больше приобретает характер самостоятельного учебного процесса. Особое значение уделяется вопросам рациональной организации, планирования учебного процесса, развития умения и навыков самостоятельной работы, прежде всего студентов заочного отделения, что в дальнейшем влияет на качественное привитие профессиональных компетенций. При такой постановке вопроса роль и значение самостоятельной работы при заочной форме обучения обусловлены спецификой организации учебного процесса. Одним из методов решения этой проблемы является введение дистанционного обучения, которое позволило организовать учебный процесс на базе телекоммуникационных и информационных технологий. При заочном обучении дистанционное обучение позволяет повысить эффективность обучения в вузе. Развитие дистанционного образования прививает студенту культуру использования современных средств телекоммуникаций, обеспечивает эффективный темп обучения, формирует и развивает познавательные интересы, положительные мотивы учебной деятельности, творческой инициативы и активности.

Ключевые слова: *образование, высшая школа, самостоятельная работа, учебный процесс, планирование, информационные технологии.*

METHODS OF ORGANIZING INDEPENDENT WORK OF STUDENTS

Eltoshkina E.V.*, Pavlova E.B.**

** Irkutsk State Agrarian University A.A. Yezhevsky, Irkutsk, Russia, EEV_Baikal2005@mail.ru*

*** East Siberian State University of Technology and Management, Ulan-Ude, Russia*

In modern higher education, due to the decrease in the classroom load, the educational process increasingly acquires the character of an independent educational process. Of particular importance are the issues of rational organization, planning of the educational process, the development of skills and skills of independent work, especially for students of the correspondence department, which further affects the qualitative instillation of professional competencies. With such a statement of the question, the role and importance of independent work in the correspondence form of education are determined by the specifics of the organization of the educational process.One of the methods of solving this problem is the introduction of distance learning, which made it possible to organize the educational process on the basis of telecommunications and information technologies. With distance learning, distance learning allows you to increase the effectiveness of education at the university. The development of distance education instills in the student a culture of using modern means of telecommunications, provides an effective pace of learning, forms and develops cognitive interests, positive motives for educational activity, creative initiative and activity.

Keywords: *education, higher school, independent work, educational process, planning, information technology.*

Введение. В современной высшей школе, в связи с уменьшением аудиторной нагрузки, учебный процесс все больше приобретает характер самостоятельного учебного процесса. Особое значение уделяется вопросам рациональной организации, планирования учебного процесса, развития умения и навыков самостоятельной работы, прежде всего студентов заочного отделения, что в дальнейшем влияет на качественное привитие профессиональных компетенций [1, 2]. Недостатком заочного обучения является то, что сессия в Иркутском ГАУ проходит один раз в год, в течении которой проводится достаточно малое количество аудиторных занятий: лекций и практик согласно учебного

плана. Например, на изучение дисциплины «Математика» учебного плана заочного отделения направления подготовки Инженерного факультета 35.03.06 «Агроинженерия» аудиторные занятия занимают всего 8 %: 14 часов лекций и 14 часов практики на первом курсе, и 10 часов лекций и 10 часов практики на втором курсе из 576 часов выделенных на изучение дисциплины.

Постановка задачи. При такой постановке вопроса роль и значение самостоятельной работы при заочной форме обучения обусловлены спецификой организации учебного процесса. Общепринятая схема проведения учебных занятий: массированная вычитка учебного материала по разным дисциплинам за короткий период сессии категорически не способствует решению задачи привития профессиональных компетенций.

Решение проблемы. Одним из методов решения этой проблемы является введение дистанционного обучения, которое позволило организовать учебный процесс на базе телекоммуникационных и информационных технологий [5]. В Иркутском ГАУ введена электронно-информационная образовательная система (ЭИОС), в которой есть возможность выложить до сессии лекционный материал, видео практических занятий, задания самостоятельной работы с учетом библиографического фонда вуза, электронные учебные пособия, методические указания для выполнения контрольных работ, контрольные и лабораторные работы (из расчета одна контрольная работа на 108 часов), тесты теоретические и практические, а также в ЭИОС организована и обратная связь для ответов на возникающие в процессе обучения вопросы. Задача преподавателя заключается в основательной разработке учебно-методического комплекса дисциплины, что решит вопрос не только обучения, но помощи студентам в овладении методами систематической, рационально-организованной, эффективной самостоятельной работы с литературой, первоисточниками, нормативно-правовыми актами, которые требуют постоянного обновления в соответствии с законодательством. А уже во время сессии можно будет легче подвести итоги такой систематической работы, так как на первый курс иногда поступают студенты окончившие школу много лет назад или со слабой математической подготовкой, и за короткий период сессии они не могут полностью погрузится в учебный процесс.

При детальном изучении национальных и мировых направлений развития высшего образования возникает необходимость детальной разработки учебно-методического комплекса для заочной форм обучения и мотивировано несколькими обстоятельствами:

в современном информационном мире назревает линия изменения организации учебного процесса: сокращение аудиторной работы, и увеличение доли самостоятельной работы студентов;

в современной постановке вопроса развития знаний прослеживается тенденция межпредметности, мотивируя при этом организацию учебной информации в виде модулей, включающих в себя весь учебно-методический комплекс дисциплины. Каждый модуль содержит профильные тестовые и кейс задания;

необходимость внедрения современных технологий обучения, а также дидактического обеспечения дисциплин образовательной программы для улучшения качества образования [3, 4].

Организация самостоятельной работы студентов подразумевает использование мировых педагогических технологий, соответствующих специфике заочной формы обучения, стимулирующих выявление личностных внутренних резервов студента. Наиболее приемлемы методы проектирования, исследования и проблемности. Учебно-методический комплекс, включает в себя:

Рабочую программу, в которой приведены, календарный план, литература, рейтинг-план.

Блок лекций и видео практических занятий согласнокалендарного плана.

Блок творческих заданий, направленных на раскрытие внутренних резервов студента, применение полученных знаний, умений, а также навыков в группах или самостоятельно в решении профессионально направленных задач.

Фонд оценочных средств по текущей аттестации в течении всего курса дисциплины (включает блоки заданий по вариантам, направленных на более глубокое усвоение изученного материала, и проверку его понимания в виде рефератов, презентаций, контрольных и лабораторных работ).

Фонд оценочных средств по промежуточной аттестации в виде комплекса тестов различных типов (с одиночным выбором, с несколькими вариантами ответов, на соответствие, на введение ответа с клавиатуры, кейс-задания) и вопросов к экзамену.

Заключение. Таким образом, мы видим, что при такой организации заочного обучения, дистанционное обучение позволяет повысить эффективность обучения в вузе. Развитие дистанционного образования прививает студенту культуру использования современных средств телекоммуникаций, обеспечивает эффективный темп обучения, формирует и развивает

познавательные интересы, положительные мотивы учебной деятельности, творческой инициативы и активности.

Библиография

1. *Валетов В.А.* Аддитивные технологии (состояние и перспективы): Учебное пособие – Санкт-Петербург: СПб.: Университет ИТМО,2015. – 63с.

2. *Елтошкина, Е. В.* Привитие профессиональных компетенций при изучении математики бакалаврами экономических направлений / Е. В. Елтошкина, Л. И. Санеева, Л. И. Назарова // Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО17): Материалы VI Международной конференции, Улан-Удэ - Байкал, 26 июня – 01 2017 года. – Улан-Удэ - Байкал: Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, 2017. – С. 170-174. – EDN YZDJOT.

3. *Павлова, Е. Б.* Формы и методы организации исследовательской деятельности студентов колледжа / Е. Б. Павлова, Е. Н. Булгатова // Геометрия многообразии и ее приложения: Материалы Пятой научной конференции с международным участием, посвященной 100-летию профессора Р. Н. Щербакова, Улан-Удэ, 03–06 июля 2018 года / Отв. ред. В.Б. Цыренова. – Улан-Удэ: Бурятский государственный университет, 2018. – С. 262-265. – EDN UZWUNE.

4. *Самбуева, С. Р.* Кейс-метод в процессе преподавания физики / С. Р. Самбуева, Э. Л. Санеев, Л. И. Санеева // Аграрное образование в условиях модернизации и инновационного развития АПК России: материалы III Всероссийской (национальной) научно-методической конференции, Улан-Удэ, 22 апреля 2022 года. – Улан-Удэ: Бурятская государственная сельскохозяйственная академия имени В.Р. Филиппова, 2022. – С. 320-324. – EDN CILDYQ.

5. *Тимиргалеева, С. Р.* Влияние информационных технологий на личность человека и межличностные взаимоотношения / С. Р. Тимиргалеева, В. А. Бомин // Спортивная держава. – 2021. – № 1(13). – С. 26-31. – EDN NEMRCE.

Bibliography

1. *Valetov V.A.* Additive technologies (state and prospects): Textbook – St. Petersburg: St. Petersburg: ITMO University, 2015. - 63s.

2. *Eltoshkina, E. V.* Instilling professional competencies in the study of mathematics by bachelors of economics / E. V. Eltoshkina, L. I. Saneeva, L. I. Nazarova // Mathematics, its Applications and Mathematical Education (MPMO17): Proceedings of the VI International Conference, Ulan-Ude - Baikal, June 26 – 01, 2017. – Ulan-Ude - Baikal: East Siberian State University of Technology and Management, 2017. – pp. 170-174. – EDN YZDJOT.

3. *Pavlova, E. B.* Forms and methods of organizing research activities of college students / E. B. Pavlova, E. N. Bulgatova // Geometry of manifolds and its applications: Materials of the Fifth Scientific Conference with international participation dedicated to the 100th anniversary of Professor R. N. Shcherbakov, Ulan-Ude, July 03-06, 2018 / Ed. by V.B. Tsyrenov. – Ulan-Ude: Buryat State University, 2018. – pp. 262-265.

4. *Sambueva, S. R.* Case-method in the process of teaching physics / S. R. Sambueva, E. L. Saneev, L. I. Saneeva // Agrarian education in the conditions of modernization and innovative development of the agro-industrial complex of Russia: Materials of the III All-Russian (National) Scientific and Methodological Conference, Ulan-Ude, April 22, 2022. – Ulan-Ude: Buryat State Agricultural Academy named after V.R. Filippov, 2022. – pp. 320-324. – EDN CILDYQ.

5. *Timirgaleeva, S. R.* The influence of information technologies on human personality and interpersonal relationships / S. R. Timirgaleeva, V. A. Bomin // Sportivnayaderzhava. – 2021. – № 1(13). – pp. 26-31. – EDN NEMRCE.

УДК 519.6

DOI 10.53980/9785907599970_100

ВЫСОКОПАРАЛЛЕЛЬНАЯ МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ С УЧЕТОМ СОПРЯЖЕННОГО ТЕПЛООБМЕНА

Жуков В.Т.*, Новикова Н.Д.*, Феодоритова О.Б.*
**Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,*
Россия, Москва, vic.zhukov@.mail.ru

Представлен метод расчета нестационарного сопряженного теплообмена газового потока и твердого тела. Метод реализует совместное интегрирование по времени уравнений газодинамики в газовой смеси и теплопроводности в твердом теле с использованием схемы расщепления на конвективный и диффузионный этапы. Первый этап выполняется с помощью схемы Годунова, второй – с помощью явно-итерационной чебышевской схемы. Метод идеально распараллеливается, консервативен и обеспечивает аппроксимацию условия сопряжения на интерфейсе «газ–твердое тело». Результаты тестирования подтверждают эффективность метода.

Ключевые слова: *численное моделирование, уравнения газодинамики, сопряженный теплообмен, твердое тело*.

A HIGHLY PARALLEL TECHNIQUE FOR SIMULATION OF TRANSIENT CONJUAGATE THERMO-GASDYNAMICS PROCESSES

Zhukov V.T.*, Novikova N.D.*, Feodoritova O.B.*
**Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences,*
Russia, Moscow, vic.zhukov@.mail.ru

A method for calculating an unsteady conjugate heat transfer between fluids and solids is presented. The method implements a coupled integration of gasdynamics equations in a gas mixture and heat conduction equation in a solid using a splitting scheme into convective and diffusion stages. The first stage is based on the Godunov scheme; the second one is implemented with an explicit-iteration Chebyshev scheme. The method is ideally parallelized, conservative, and provides an approximation of the conjugate condition at the "gas-solid" interface. The results confirm the efficiency of the method.

Key words: *numerical simulation, gasdynamics equations, conjugate heat transfer, solid body*.

Введение

В работе рассматривается модель нестационарного взаимодействия вязкого теплопроводного многокомпонентного газового потока с твердым телом. Численный анализ термо- газодинамики является важным элементом проектирования систем тепловой защиты аэрокосмических аппаратов [1]. Процессы обтекания и нагрева являются взаимосвязанными: твердая поверхность подвергается аэродинамическому нагреву, а нагретая поверхность возвращает часть тепла в газовый поток и т.д. В связанной задаче, известной как задача сопряженного теплообмена, возникает интерфейсная граница контакта «газ – твердое тело», на которой задаются условия теплообмена в виде непрерывности температуры и нормальной к границе компоненты вектора теплового потока [2 – 6]. В ряде работ задача сопряженного теплообмена решается с помощью газодинамического и твердотельного теплового компьютерных кодов. Первый код интегрирует уравнения в газе, второй код – уравнение теплопроводности в твердом теле. Эти коды периодически обмениваются данными с целью достижения условия сопряжения на интерфейсной границе. Различные варианты стратегий расчета рассмотрены в [3]. В данной работе представлена новая методика прямого интегрирования определяющих уравнений на неструктурированных многоблочных конформных сетках без итераций по областям. Постановка задачи включает систему уравнений Навье-Стокса с добавлением уравнений диффузии химических компонентов в газовой области. То есть, в дополнение к переносу тепла теплопроводностью и конвекцией учитывается перенос тепла диффузией. Число компонентов может быть достаточно большим, что многократно увеличивает вычислительную сложность всей задачи. В перспективе будут учтены и химические реакции. Поэтому мы исключаем возможность упомянутых

выше итераций по областям. Предлагаемый нами метод обеспечивает аппроксимацию условий сопряжения. Метод является консервативным, что важно для нестационарных исследований, а его простая алгоритмическая структура идеально подходит для массивно-параллельных вычислений. Метод иллюстрируется на примере численного анализа нестационарной сингулярной задачи сопряженного теплообмена с аналитическим решением, полученным на основе преобразования А.А. Дородницына [7], см. [2].

1. Постановка задачи сопряженного теплообмена

Основой математической модели является расширенная система уравнений Навье–Стокса, записанная для смеси вязких теплопроводных газов с учетом диффузии компонентов [6]. Полагаем, что в газе и твердом теле при заданной плотности ρ известны прямая и обратная функциональные зависимости внутренней энергии ε и температуры T: $\varepsilon = \varepsilon(T), \quad T = T(\varepsilon)$. В твердом теле записывается уравнение теплопроводности в виде $\partial\varepsilon/\partial t = div\left(\kappa(T)\, grad\, T\right) + f$, где коэффициент теплопроводности κ и источник тепла f являются функциями координат и температуры. Для изложения методики рассмотрим модельную задачу. Расчетная область состоит из горизонтальной пластины $l \times b_1$ и расположенной над ней газовой области $l \times b_2$. На нижней границе пластины задана постоянная температура $T_e = 900\,K$. В газовой области верхняя граница – стенка с постоянной температурой $T_b = 300\,K$, нижняя – это интерфейсная граница «газ–твердое тело». На левой и правой сторонах расчетной области заданы условия периодичности. При $t < 0$ газ покоится, затем мгновенно при $t = 0$ ускоряется до постоянной скорости U_∞ (число Маха $M_\infty = 3$). При $t = 0$ температура одинакова в газе и твердом теле: $T(x, y, 0) = T_0$. Начальные параметры газа: $p = p_0,\ T = T_0 = T_\infty = 300\,K$, компоненты скорости $u_1 = U_\infty,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0$. Вязкость и теплопроводность в газе заданы формулами: $\mu(T) = \mu_0 \cdot T/T_0$, $\lambda_f(T) = \lambda_f^0 \cdot T/T_0$ с постоянными μ_0 и λ_f^0, одинаковыми для каждого компонента. Сформулированная задача хорошо подходит для проверки работоспособности схем в нестационарных процессах сопряженного теплообмена и близка по постановке работам [2, 3].

2. Алгоритм расчета

Для объяснения расчетной схемы представим алгоритм решения определяющей системы уравнений в газовой области. Обозначим вектор консервативных переменных как $\boldsymbol{U} \equiv \rho\ (1,\ u_1, u_2, u_3,\ e_{tot},\ Y_m,\ m = 1, ..., N_{sp})$, где $e_{tot} = e + 0.5u^2$ – полная энергия единицы массы, Y_m – массовая доля химического компонента m, N_{sp} – число компонентов. Запишем непрерывную по времени и дискретную по пространству аппроксимацию системы уравнений на неструктурированной трехмерной сетке в операторном виде $\boldsymbol{U}_t + C_h \boldsymbol{U} + D_h \boldsymbol{U} = 0$, где C_h, D_h – конвективный и диффузионный дискретные операторы соответственно, h – сеточный параметр, характеризующий сетку. В операторе D_h учитываются диссипативные процессы, т.е. вязкость, диффузия компонентов и теплопроводность. На неструктурированной сетке с многогранными ячейками записывается конечно-объемная схема с определением консервативных переменных в узлах сетки. В твердом теле строится своя сетка, но на интерфейсе сетки согласованы «узел в узел». Ячейки консервативности представляют собой дуальные объемы, ассоциированные с узлами геометрической сетки.

Расчет одного шага по времени расщеплен на гиперболический и параболический этапы: первый основан на схеме Годунова, второй – на явно-итерационной чебышевской схеме LINS (Local Iterations for Navier-Stokes) [6]. На параболическом этапе решаются две подзадачи. В первой из них решаются редуцированные (без учета конвективного переноса) уравнения импульса и диффузии компонентов, во второй – редуцированное уравнение энергии в газе и твердом теле, оно интегрируется как единое уравнение. Схема LINS обеспечивает аппроксимацию условий теплообмена и элегантную форму метода в многообластном случае, когда разностная дискретизация становится в целом нестандартной

(так как шаблон дискретизации интерфейсного узла лежит в нескольких смежных областях).

3. Результаты расчетов

Аналитическое решение $\theta_{anal} = \theta(t^*)$ для безразмерной температуры $\theta = \left(T - T_\infty\right)/T_\infty$ как функции безразмерного времени $t^* = tU_\infty/b$ приведено в [2, 3] на основе обобщения преобразования Дородницына [7]. Точка $t^* = 0$ является особой, в решении возникает сингулярность. При $t^* \to 0$ решение θ_{anal} является конечным, а тепловой поток бесконечен. Сингулярность означает, что сходимость численных решений к точному может быть достигнута вне малого интервала времени. Результаты расчетов приведены для случая равномерной сетки с шагом $h = 10^{-5}$ по вертикальному направлению. Исследована зависимость от времени температуры θ на интерфейсе и односторонних тепловых потоков в интервале времени $2.4 \cdot 10^{-5} < t < 2.4 \cdot 10^{-4}$. Установлено, что различие односторонних потоков составляет менее 0.6%, а расчетное и аналитическое решения для температуры на указанном интервале времени графически неразличимы.

Заключение

Предложенный метод основан на сопряжении процессов теплообмена в силу прямого интегрирования по времени уравнения энергии в газовой области и твердом теле. Тем самым обеспечивается аппроксимация условий сопряженного теплообмена на интерфейсных границах. Алгоритм эффективен в параллельной реализации на многоблочных сетках. Для сквозного многообластного расчета предложена элегантная техника, основанная на возможностях явно-итерационной чебышевской схемы. Метод может быть обобщен для произвольного расположения и сочетания многоблочных неструктурированных сеток, построенных для описания взаимодействия газодинамического течения с твердыми телами. Граница одного блока может примыкать к нескольким соседним блокам, но так, чтобы полная сетка по границам блоков была состыкована.

Получен надежный, высокоточный, консервативный метод для решения задачи нестационарного сопряженного теплообмена. Представленный анализ задачи о нагреве высокоскоростного потока горячей пластиной подтверждает перспективность предлагаемого подхода к решению нестационарных задач сопряженного теплообмена.

Библиография

1. *Dimitrienko Y.I., Zakharov A.A., Koryakov M.N.* Coupled problems of high-speed aerodynamics and thermomechanics of heat-shielding structures //J. Phys.: Conf. Ser. 2018. – Vol. 1141. 012094.

2. *Pozzi A., Tognaccini R.* Time singularities in conjugated thermo-fluid-dynamic phenomena // J. Fluid Mech. 2005. – V. 538. – P. 361 – 376.

3. *Radenac E., Gressier J., Millan P.* Methodology of numerical coupling for transient conjugate heat transfer // Computers & Fluids. 2014. –Vol. 100. – P. 95–107.

4. *Luikov A.V.* Conjugate convective heat transfer problems // Int. J. of Heat and Mass Transfer. 1974. – Vol.17. – P. 1207–1214.

5. *Feodoritova O.B., Krasnov M.M., Novikova N.D., Zhukov V.T.* A Numerical Method for Conjugate Heat Transfer Problems in Multicomponent Flows // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. – Vol. 2028. 012024.

6. Feodoritova O.B., Novikova N.D. and Zhukov V.T. An explicit iterative scheme for 3D multicomponent heat conducting flow simulation // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. – Vol. 2028. 012022.

7. *Дородницын А.А.* Пограничный слой в сжимаемом газе // Прикл. матем. и механика. 1942. –Т.6, № 6. – С. 449–486.

Bibliography

1. *Dimitrienko Y.I., Zakharov A.A., Koryakov M.N.* Coupled problems of high-speed aerodynamics and thermomechanics of heat-shielding structures //J. Phys.: Conf. Ser. 2018. – Vol. 1141, 012094.

2. *Pozzi A., Tognaccini R.* Time singularities in conjugated thermo-fluid-dynamic phenomena // J. Fluid Mech. 2005. – Vol. 538. – P. 361 – 376.

3. *Radenac E., Gressier J., Millan P.* Methodology of numerical coupling for transient conjugate heat transfer // Computers & Fluids. 2014. – Vol. 100. – P. 95–107.

4. *Luikov A.V.* Conjugate convective heat transfer problems // Int. J. of Heat and Mass Transfer. 1974. – Vol. 17. – P.1207–1214.

5. *Feodoritova O.B., Krasnov M.M., Novikova N.D., Zhukov V.T.* A Numerical Method for Conjugate Heat Transfer Problems in Multicomponent Flows // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. – Vol. 2028. 012024.

6. *Feodoritova O.B., Novikova N.D. and Zhukov V.T.* An explicit iterative scheme for 3D multicomponent heat conducting flow simulation // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. – Vol. 2028. 012022.

7. *Dorodnitsyn A. A.* Boundary layer in compressible gas // Prikl. Mat. and Mechanics. 1942. – Vol. 6, No. 6. – P. 449–486.

УДК 517.95

DOI 10.53980/9785907599970_104

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Жигжитжапов Б.В.*, Кожанов А.И. *****
** Бурятский государственный университет, Россия, Улан-Удэ*
zhbat120401@gmail.com
*** Институт математики имени Соболева, Россия, Новосибирск*
**** Бурятский государственный университет, Россия, Улан-Удэ*
kozhanov@math.nsc.ru

Доказывается теорема о достаточных условиях существования и единственности решения, обобщенного в смысле производных С. Л. Соболева, одной краевой задачи для составного уравнения составного типа с вырождением.

Ключевые слова: *уравнения в частных производных, уравнения составного типа, вырождение.*

BOUNDARY -VALUE PROBLEM FOR A CLASS OF COMPOSITE-TYPE EQUATIONS WITH DEGENERATION

Zhigzhitzhapov B.V.*, Kozhanov A.I.**
** Buryat State University, Russia, Ulan-Ude, zhbat120401@gmail.com*
*** Sobolev institute of mathematics, Russia, Novosibirsk*
**** Buryat State University, Russia, Ulan-Ude, kozhanov@math.nsc.ru*

A theorem for existence and uniqueness of a generalized solution in Sobolev spaces of a boundary-value problem for a composite-type equation with degeneration is proven.

Key words*: partial differential equations, composite-type equations, degeneration.*

Введение

В теории дифференциальных уравнений в частных производных, под вырождающимися обычно понимают те уравнения, которые меняют свой тип на некотором подмножестве замыкания области определения независимых переменных. В то же время, иногда уравнения, имеющие особенности на некоторых многообразиях рассматриваемой области, также называют вырождающимися. И в первом и во втором случае, характер вырождения может быть очень разнообразным, поэтому точной классификации вырождения не существует.

В настоящей работе задача имеет вырождение в том смысле, что переменный коэффициент при старшем по времени дифференциальном операторе принимает в некоторой точке замыкания области определения временной переменной такое значение, при котором оператор перестает быть обратимым.

Уравнение, представленное в докладе, было до этого исследовано в [1, 3] и др., а его слабое вырождение – в [2]. В данной работе исследуется случай, когда коэффициент при старшем операторе по времени имеет особенность в точке, и делает его необратимым.

1. Постановка задачи

Пусть $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t \in [0,T]$, Δ - оператор Лапласа по x, $f(x,t), \beta(t)$ - известные функции, γ, δ - известные постоянные

Под λ_k понимается -ое собственное число для оператора Лапласа при однородных условиях Дирихле.

Работа посвящена получению достаточных условий для существования и единственности регулярных решений $u(x,t)$ для уравнения

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (№ 23-21-00269).

$$(\beta(t) - \Delta)D_t^{2p+1} u(x,t) + \gamma\Delta u(x,t) + \delta u(x,t) = f(x,t), \quad (1)$$

таких, что

$$\exists! t^* \in [0,T], \beta(t^*) = \lambda_1, \quad \forall t \in [0,T], \beta(t) > \lambda_2 \quad (2)$$

и

$$u(x,t)|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad D_t^r u(x,0) = D_t^r u(x,T) = 0, \ r = 0,1,\dots,p+1. \quad (3)$$

2. Важные теоремы

Теорема. Пусть $\beta(t) \in C^1([0,T]), \beta'(t) > 0, (-1)^{p+1}(\gamma\lambda 1 + \delta) \geq 0, \left|\frac{f(x,t)}{(\beta(t)-\lambda 1)}\right| \in L_2(\Omega \times [0,T])$, тогда для задачи (1-3) существует единственное решение $u(x,t) \in W_{2p+1}^2(\Omega \times [0,T])$.

Заключение

Таким образом, найдены достаточные условия для существования и единственности решения $u(x,t)$ (1-3) в пространстве Соболева $W_{2p+1}^2(\Omega \times [0,T])$.

Библиография

1. *Дубинский Ю.А.* Об одной абстрактной теореме и ее приложениях к краевым задачам для неклассических уравнений. // Математический сборник. 1969. – Т.79, № 1. – С. 91–117.

2. *Кожанов А.И.* Квазипараболические уравнения со слабым вырождением // Математические заметки СВФУ. 2021. – Т. 21, № 1. – С. 27–36.

3. *Фураев Ф.З.* О разрешимости в целом первой краевой задачи для обобщенного уравнения Буссинеска. // Дифференциальные уравнения. 1983, – Т. 19, № 11. – С. 2014-2015.

Bibliography

1. Dubinskii *Yu.A.* On an abstract theorem and its applications to boundary value problems for nonclassical equations // Math. USSR-Sb.1969. − Vol.79, № 1. – P. 91–117.

2. *Kozhanov A.I.* Boundary value problems for third–order pseudoelliptic equations with degeneration sredy // Mat. Zametki SVFU. 2021. – Vol. 21, № 1. – P. 27–36.

3. *Furaev V. Z* On global solvability of the first boundary value problem for the generalized Boussinesque equation. // Differentsial'nye Uravneiya [Differential Equations], – Vol. 19, №. 11, – P. 2014–2015.

УДК 51-74:621.225.106 УДК 517.95

DOI 10.53980/9785907599970_106

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СХЕМЫ СЕРВОПРИВОДА ПРЕЦИЗИОННОГО ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ КАНАЛОВ УПРАВЛЕНИЯ ПО РЯДУ ФИБОНАЧЧИ

Захаренков Н.В., Захаренкова Т.Р.
Омский государственный технический университет,
Россия, Омск, znickbar@mail.ru

Рассмотрена схема сервопривода с цифровым управлением, содержащим разрядные гидроцилиндры, соединенные последовательно. Это позволяет получить более высокую точность позиционирования. Указанная цель достигается тем, что длины ходов поршней связаны двоичным рядом чисел, а также произведением числа единиц длины на число Фибоначчи. Для иллюстрации возможностей сервопривода, приведены расчетные характеристики 16-разрядного прецизионного цифрового сервопривода с минимальным и максимальным ходами штока, соответственно равными 1,5 мкм и 99,9985 мм.

Ключевые слова: *гидродвигатель, позиционный привод, числа Фибоначчи.*

DESIGN OF A PRECISION POSITIONING SERVO DRIVE WITH DISTRIBUTION OF CONTROL CHANNELS ACCORDING TO THE FIBONACCI SEQUENCE

Zakharenkov N.V., Zakharenkova T.R.
Omsk State Technical University, Russia, Omsk
znickbar@mail.ru

The scheme of a digitally controlled servo drive containing discharge hydraulic cylinders connected in series is considered. This allows for higher positioning accuracy. This goal is achieved by the fact that the lengths of the piston strokes are connected by a binary series of numbers, as well as by the product of the number of units of length by the Fibonacci number. To illustrate the capabilities of the servo, the calculated characteristics of a 16-bit precision digital servo with minimum and maximum strokes of 1.5 μm and 99.9985 mm, respectively, are given.

Key words*: hydraulic motor, position actuator, Fibonacci sequence.*

Введение

Такие типы исследовательского оборудования, как, например, сверхбольшие сегментированные астрономические телескопы, оснащенные адаптивной оптической системой, требуют малой ошибки позиционирования менее 50 нанометров [1]. Это оборудование требует также очень быстрого действия привода. Для обеспечения нанометровой точности в сочетании с миллисекундным быстродействием необходимо использовать правильный тип привода [2] и иметь систему с компьютерным управлением [3].

1. Постановка задачи

Известны электрогидравлические сервоприводы с цифровым управлением, содержащие разрядные гидроцилиндры с их последовательным соединением, а также снабженные электромагнитными клапанами. Их конструкция аналогична представленной на рис. 1. Имеющиеся недостатки известного цифрового сервопривода ограничивают применение в тех случаях, когда требуется более высокая точность позиционирования. Например, для 9-разрядного сервопривода с полным рабочим ходом в 200 мм ход гидроцилиндра младшего разряда должен быть менее 0,4 мм.

Конструкция прецизионного цифрового сервопривода представленная на рис. 1 позволяет решить ограничение на длину хода младшего разряда. Сервопривод содержит гильзу 6 и размещенные в ней разрядные цилиндры с поршнями 4, длины ходов которых связаны двоичным рядом чисел. Цилиндры имеют полости, подключенные к распределительному устройству. Кроме того, в гильзе установлен последовательно разрядным цилиндрам вспомогательный цифровой привод. Часть

цилиндров вспомогательного цифрового привода назовем первыми. Длины ходов первых цилиндров превышают длины ходов соответствующих разрядных цилиндров на одинаковое число единиц длины *L*. Оставшуюся часть цилиндров назовем вторыми, каждый из которых выполнен с длиной хода, равной произведению числа единиц длины *L* на число Фибоначчи. Суммарный ход вторых цилиндров равен произведению указанного числа единиц длины на количество первых цилиндров.

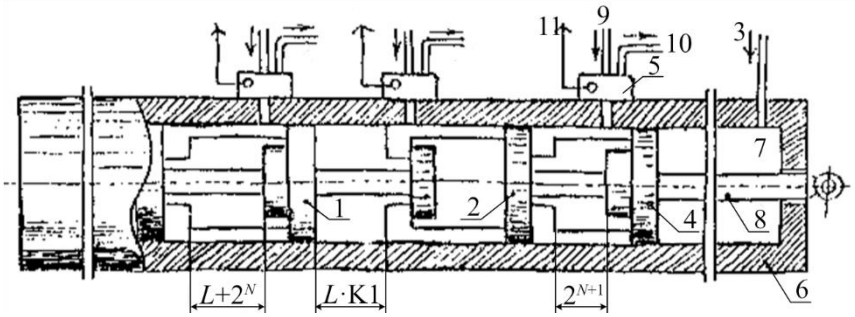


Рисунок 1 – Прецизионный цифровой сервопривод

Для управления сервоприводом имеется распределительное устройство, содержащее электромагнитные клапаны 5, которыми снабжены первые 1, вторые 2 и разрядные 4 цилиндры. Давление к электромагнитному клапану 5 подводится от источника давления по каналу 9, а канал 10 соединяет указанный клапан со сливом. Клемма 11 служит для подключения управляющего входа клапана 5 к соответствующей разрядной шине устройства системы управления. Причем каждый электромагнитный клапан подключен своим управляющим входом только к одной из выходных шин устройства управления. В составе сервопривода содержится n_0 разрядных, n_1 первых и n_2 вторых цилиндров, размещенных последовательно в гильзе 6, которая имеет камеру 7 постоянного давления и выходной шток 8, соединенный с крайним цилиндром. Давление в камеру 7 подается по каналу 3.

2. Расчетные соотношения для реализации полного хода

Единица длины *L* вводится, как дополнительная длина к длине цилиндра, для исключения технологических ограничений на минимальную длину младшего разряда. Каждый из вторых цилиндров вспомогательного цифрового привода выполнен с длиной хода, равной произведению указанного числа единиц длины *L* на число Фибоначчи $\varphi_p(n)$, т.е. равной $\varphi_p(n)L$. Суммарный ход равен произведению указанного числа *L* единиц длины на количество n_1 первых цилиндров, т.е. задавая n_2 – число вторых цилиндров, получаем количество первых цилиндров n_1 из следующего равенства:

$$\sum_{i=1}^{n_2} \varphi_p(i) L = n_1 L,$$

где n_2 – количество вторых цилиндров: $\varphi_p(i)$ – число Фибоначчи, определяемое из рекуррентного соотношения вида:

$$\varphi_p(n) = \begin{cases} 0 \text{ при } n < 0; \\ 1 \text{ при } n = 0; \\ \varphi_p(n-1) + \varphi_p(n-P-1) \text{ при } n > 0. \end{cases}$$

где *n* – порядковый номер числа в числовом ряде; *P* – параметр ряда в виде целого числа (шаг, который дает следующий элемент).

Если шаг больше, чем текущий номер элемента, то первые два условия, по сути, превращают его в 1 через множество шагов рекурсии. Данное рекуррентное соотношение порождает бесконечное количество числовых рядов, частными случаями которых являются двоичный ряд (*P* = 0) и классический ряд Фибоначчи (*P* = 1). При *P* = 2 и *P* = 3 последовательности *P*-чисел Фибоначчи (ряды Фибоначчи) соответственно имеют вид 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, … и 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 14, 19, 26, При $P = \infty$ ряд *P*-чисел Фибоначчи состоит из одних единиц. В примере конкретной

частной реализации привода, который приводится по тексту, выбран отрезок ряда при $P = 2$, включающий только числа 1, 2, 3, 4, т.е. последовательность без повторяющихся чисел.

Для иллюстрации возможностей изобретения, в таблице 1 приведены расчетные характеристики 16-разрядного прецизионного цифрового сервопривода с минимальным и максимальным ходами штока 8, соответственно равными 1,5 мкм и 99,9985 мм. В этот сервопривод входит шесть разрядных цилиндров 4, десять первых 1 и четыре вторых 2 цилиндра. У вторых цилиндров ходы соответствуют отрезку ряда Фибоначчи (при $P = 2$) и составляют следующий ряд из значений: L, $2L$, $3L$, $4L$.

Таблица 1 – Значения основных характеристик

Разряд	Ход цилиндров, мкм		
	Первых	Вторых	Разрядных
0	L + 1,5	L	-
1	L + 3,0	$2L$	-
2	L + 6,1	-	-
3	L + 12,2	$3L$	-
4	L + 24,4	-	-
5	L + 48,8	-	-
6	L + 97,7	$4L$	-
7	L + 195,3	-	-
8	L + 390,6	-	-
9	L + 781,3	-	-
10	-	-	1562,5
11	-	-	3125,0
12	-	-	6250,0
13	-	-	12500,0
14	-	-	25000,0
15	-	-	50000,0

Заключение

Таким образом, с помощью задания единицы длины L решается проблема технологического ограничения на изготовление цилиндра младшего разряда. Условия выбора количества и длин первых, вторых и разрядных цилиндров дают возможность производить синтез параметров дискретного привода для дальнейшего проектирования.

Библиография

1. *Nevshupa R.A., Deulin E.A., Mikhailov V.P., Panfilov Yu.V.* Mechanics and Physics of Precise Vacuum Mechanisms // Fluid mechanics and its applications. Volume 91 2010 DOI 10.1007/978-90-481-2520-3

2. *Трушин Н.Н.* Разработка системы классификации объемных гидравлических приводов машин // Вестник вологодского государственного университета. Серия: технические науки. 2020. – №3(9). – С. 18-22.

3. *Смирнов С.А., Горшкова Н.А.* Методика проектирования гидроприводов на примере гидропривода подъёмно-мачтового устройства // Системный анализ и прикладная информатика. 2017. – № 4. – С. 21–26.

Bibliography

1. *R.A. Nevshupa E.A. Deulin • V.P. Mikhailov Yu.V. Panfilov* Mechanics and Physics of Precise Vacuum Mechanisms // Fluid mechanics and its applications. Volume 91 2010 DOI 10.1007/978-90-481-2520-3

2. *Marchuk G.I.* Matematicheskoe vodelirovanie v problem okruzhayushchei sredy [Mathematical modeling in the environmental problem.] M.: Science, 1982. – 320 p.

3. *Gaiduk A.R.* Optimal'nye i adaptivnye sistemy avtomaticheskogo upravleniya [Optimal and adaptive automatic control systems]. Moscow, Uchlitvuz Publ., 2006. – 246 p.

УДК 519.622 УДК 517.95

DOI 10.53980/9785907599970_109

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ХЕССЕНБЕРГОВОЙ ФОРМЫ[1*]

Индуцкая Т.С.*

**Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, Россия, Иркутск, indutskaya.tat@yandex.ru*

Работа посвящена исследованию на предмет существования единственного непрерывного решения систем дифференциальных уравнений с производной Римана – Лиувилля. Предполагается, что матричный пучок системы имеет форму Хессенберга. Численный метод, предложенный в работе, основан на переходе к эквивалентному интегро-алгебраическому уравнению. В этой форме интегральные слагаемые приближенно вычисляются с помощью квадратурной формулы правых прямоугольников и метода интегрирования произведений. Приведены графики погрешностей предложенного алгоритма.

Ключевые слова: *дифференциально-алгебраические уравнения, дробная производная Римана – Лиувилля, форма Хессенберга, метод интегрирования произведений.*

ON THE NUMERICAL SOLUTION OF SYSTEMS OF FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS IN HESSENBERG FORM

Indutskaya T.S.*

** Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Russia, Irkutsk, indutskaya.tat@yandex.ru*

The work is devoted to the study of the existence of a unique continuous solution of systems of differential equations with the Riemann – Liouville derivative. It is assumed that the matrix beam of the system has the Hessenberg form. The numerical method proposed in the work is based on the transition to an equivalent integro-algebraic equation. In this form, the integral terms are approximately calculated using the quadrature formula of right rectangles and the product integration method. Graphs of errors of the proposed algorithm are given.

Key words*: differential-algebraic equations, Riemann – Liouville fractional derivative, Hessenberg form, product integration method.*

Введение

Дифференциальные уравнения (ДУ) дробного порядка применяются для описания различных процессов гидродинамики [1], наследственной механике сплошных сред [1] и др. В настоящее время направление вычислительной математики, связанное с численными методами решения вырожденных систем ДУ (дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ)) с дробными производными находится в начале своего развития. Явные численные схемы, разработанные для систем ДУ дробных порядков принципиально неприменимы к ДАУ дробного порядка, в силу вырожденности матрицы стоящей в главной части. Данная работа посвящена разработке численных методов решения ДАУ дробного порядка с производной Римана – Лиувилля, имеющих форму Хессенберга.

1. Постановка задачи

Рассмотрим начальную задачу

$$D_{0+}^{\alpha}\left(A(t)u(t)\right)+B(t)u(t)=f(t),\ \ t\in[0;1], \tag{1}$$

$$D_{0+}^{\alpha-1}\left(A(t)u(t)\right)\Big|_{t\to 0+}=u_0,\ \ u_0\in R^n. \tag{2}$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$ – переменные $(n\times n)$ матрицы, $u(t)$, $f(t)$ – искомая и заданная n-мерные вектор-функции, и введено обозначение производной Римана – Лиувилля [2]

[1*] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00173, https://rscf.ru/project/22-11-00173/

$$D_{0+}^{\alpha} g(t) = \frac{d}{dt} I_{0+}^{1-\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} g(s) ds,$$

дробного порядка $0 < \alpha < 1$.

Под решением задачи (1), (2) будем понимать непрерывную вектор-функцию обращающую в тождество уравнение (1) и удовлетворяющую начальному условию (2).

Далее будем рассматривать случай, когда матричный пучок $\lambda A(t) + B(t)$ регулярный и имеет форму Хессенберга [3], а именно

$$\lambda A(t) + B(t) = \lambda \begin{pmatrix} E & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & E & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & E & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & E & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11}(t) & * & * & B_{1,1-r}(t) & B_{1r}(t) \\ B_{21}(t) & * & * & B_{2,r-1}(t) & 0 \\ 0 & * & * & * & \cdot \\ \cdot & \cdot & * & * & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & B_{r,r-1}(t) & 0 \end{pmatrix},$$

где E – единичная матрица и B_{ij} – матрицы. Для задачи (1), (2), матричный пучок которой имеет форму Хессенберга, сформулированы условия существования единственного непрерывного решения.

2. Численный метод

Численный метод основан на представлении исходной начальной задачи (1), (2) в виде интегрального уравнения. Действие оператором интегрирования Римана – Лиувилля I_{0+}^{α} дробного порядка $0 < \alpha < 1$ на уравнение (1) преобразует рассматриваемую задачу к эквивалентному [2] интегро-алгебраическому уравнению типа Абеля

$$A(t)u(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} B(s)u(s) ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds + \frac{u_0 t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Равенство $u_0 = 0$ должно выполняться за необходимостью, чтобы решение исходной задачи (1), (2) и ее эквивалентной формы было непрерывным на отрезке $[0;1]$. Далее будем рассматривать задачу с нулевым начальным условием (2), т.е.

$$A(t)u(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} B(s)u(s) ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds.$$

Для вычисления интегралов будем использовать квадратурную формулу правых прямоугольников и метод интегрирования произведений [4]. Зададим на отрезке $[0;1]$ равномерную сетку

$$t_i = ih, \ i = 1,...,N, \ h = \frac{1}{N},$$

и введем обозначения $f_i = f(t_i)$, $u_i \approx u(t_i)$, тогда численный метод имеет вид

$$A_i u_i + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{j=1}^{i} \omega_{i,j} B_j u_j = \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{j=1}^{i} \omega_{i,j} f_j,$$

где $\omega_{i,j} = \left((i-j+1)^{\alpha} - (i-j)^{\alpha} \right)$ – веса квадратурной формулы.

3. Численные эксперименты

Предложенный алгоритм проверен на тестовых ДАУ, для которых значения параметра дифференцирования α были выбраны произвольно. Рассмотрим один из них.

Пример.

$$D_{0+}^{\alpha} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u(t) \right) + \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + 2t^2 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0;1].$$

Система имеет единственное непрерывное решение вида: $u(t) = (t, t^2)$. На рис. 1 изображены графики погрешностей по евклидовой норме при $\alpha = 0.77$. Максимальные значения погрешностей находятся в первых точках, и если судить по этим значениям, метод имеет порядок $O(1)$. Но при некотором отступе от первых значений, видно, что погрешности уменьшаются вдвое с уменьшением

шага в 2 раза. Похожий эффект был получен в [5] при численном решении ДАУ первого порядка с применением неявной схемы Эйлера.

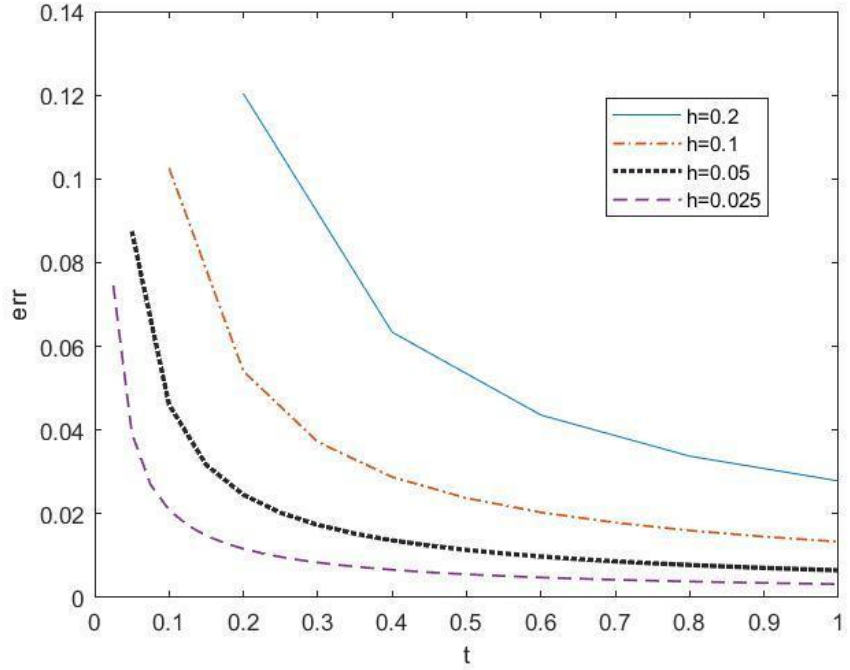


Рисунок 1 – Значения погрешностей при $\alpha = 0.77$

Заключение

Проведенные расчеты демонстрируют работоспособность предложенного алгоритма. В дальнейшем планируется обосновать данный метод для различных значений параметра α, а также построить многошаговые методы решения ДАУ дробного порядка.

Библиография

1. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. – Ульяновск: Артишок, 2008. – 510 с.

2. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam; Boston; Heidelberg: Elsevier Science Publishers, 2006. – 541 p.

3. *Brenan K. E.* Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations. Philadelphia: SIAM, 1996.

4. *Weiss R.* Product integration for the generalized Abel equation // Mathematics of computation. 1972. – Т. 26, № 117. – P. 177–190.

5. Бояринцев Ю.Е., Корсуков В.М. Применение разностных методов к решению регулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Вопросы прикладной математики. 1975. – С. 140–152.

Bibliography

1. *Uchaikin V.V.* Fractional Derivative Method. Ulyanovsk: Artichoke. 2008. – 510 p.

2. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam; Boston; Heidelberg: Elsevier Science Publishers, 2006. – 541 p.

3. *Brenan K. E.* Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations. Philadelphia: SIAM, 1996.

4. *Weiss R.* Product integration for the generalized Abel equation // Mathematics of computation. 1972. – Т. 26, № 117. – P. 177–190.

5. *Boyarintsev Yu.E., Korsukov V.M.* Application of difference methods to the solution of regular systems of ordinary differential equations // Issues of Applied Mathematics. 1975. – P. 140–152.

УДК 517.977

DOI 10.53980/9785907599970_112

МЕТОДЫ ПОИСКА ОСОБЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ НА ОСНОВЕ ЗАДАЧ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

Казьмин И.Д.
Бурятский государственный университет, Россия, Улан-Удэ
kazminvanya@mail.ru

В классе линейных по управлению задач оптимального управления рассматриваются новые формы условий принципа максимума, имеющих вид задач о неподвижной точке в пространстве управлений. Рассматриваемые задачи о неподвижной точке позволяют вводить новые эквивалентные определения для особых экстремальных управлений и конструировать новые методы поиска особых экстремальных управлений. Проводится сравнительный анализ эффективности поиска особых экстремальных управлений предлагаемыми методами неподвижных точек на модельных примерах.

Ключевые слова: *линейная по управлению задача оптимального управления, принцип максимума, особое экстремальное управление, задача о неподвижной точке, итерационные методы.*

METHODS OF SEARCHING FOR DEGENERATE EXTREMAL CONTROLS BASED ON FIXED POINT PROBLEMS

Kazmin I.D.
Buryat State University, Russia, Ulan-Ude
kazminvanya@mail.ru

In the class of optimal control problems linear in control, new forms of the maximum principle conditions are considered, which have the form of fixed point problems in the control space. The fixed point problems under consideration make it possible to introduce new equivalent definitions for degenerate extremal controls and construct new methods for finding degenerate extremal controls. A comparative analysis of the efficiency of the search for degenerate extremal controls by the proposed methods of fixed points is carried out on model examples.

Keywords: *optimal control problem linear in control, maximum principle, degenerate extremal control, fixed point problem, iterative methods.*

Введение

Классическим подходом к поиску экстремальных управлений (удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности) является поиск решения краевой задачи принципа максимума [1] с общеизвестными трудностями. Другим распространенным подходом является построение релаксационных последовательностей управления на основе последовательного решения задач улучшения управления. При определенных условиях такие последовательности сходятся к экстремальным управлениям. Пример такого подхода представляют известные градиентные методы [2].

Поиск экстремальных управлений существенно усложняется в особых случаях, когда классические условия принципа максимума вырождаются, т.е выполняются тривиально или не позволяют однозначно определять экстремальные решения. Метод краевой задачи принципа максимума и градиентные методы становятся не эффективными для поиска особых экстремальных управлений.

В работе в классе линейных по управлению задач оптимального управления рассматриваются новые формы принципа максимума в виде задач о неподвижной точке [3], которые позволяют формулировать новые определения особых экстремальных управлений и новые методы их поиска.

1. Задачи о неподвижной точке принципа максимума

Рассматривается класс линейных по управлению задач оптимального управления:

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T (\langle a(x(t),t), u(t)\rangle + d(x(t),t))dt \to \inf_{u\in V}, \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = A(x(t),t)u(t) + b(x(t),t),\ x(t_0) = x^0,\ u(t) \in U \subset R^m,\ t \in T = [t_0, t_1], \tag{2}$$

в котором переменная $x(t) = (x_1(t),...,x_n(t)) \in R^n$ описывает состояние системы, переменная $u(t) = (u_1(t),...,u_m(t)) \in R^m$ характеризует управляющее воздействие в системе. Функции $a(x,t),\ d(x,t),$ $A(x,t),\ b(x,t)$ дифференцируемы по переменной x и непрерывны по переменной t на множестве $R^n \times T$. Функция $\varphi(x)$ дифференцируема на множестве R^n. В качестве допустимых управлений $u(t)$, $t \in T$ рассматривается множество V кусочно-непрерывных функций со значениями в компактном и выпуклом множестве $U \subset R^m$. Начальное состояние x^0 и временной интервал T заданы.

Функция Понтрягина с сопряженной переменной ψ в задаче (1), (2) имеет следующий вид:

$$H(\psi, x, u, t) = H_0(\psi, x, t) + \langle H_1(\psi, x, t), u \rangle,$$

$$H_0(\psi, x, t) = \langle \psi, b(x,t) \rangle - d(x,t),\ H_1(\psi, x, t) = A^T(x,t)\psi - a(x,t).$$

Стандартная сопряженная система рассматривается в следующей форме:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u(t), t), \qquad t \in T, \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)). \tag{3}$$

Для $v \in V$ обозначим $x(t,v)$, $t \in T$ - решение системы (2) при $u(t) = v(t)$; $\psi(t,v)$, $t \in T$ - решение стандартной сопряженной системы (3) при $x(t) = x(t,v)$, $u(t) = v(t)$.

Рассмотрим отображение на основе операции максимизации:

$$u^*(\psi, x, t) = \arg\max_{w \in U} \langle H_1(\psi, x, t), w \rangle,\ x \in R^n,\ \psi \in R^n,\ t \in T.$$

С помощью отображения u^* условие известного принципа максимума для управления $u \in V$ в задаче (1), (2) можно записать в виде:

$$u(t) = u^*(\psi(t,u), x(t,u), t),\ t \in T. \tag{4}$$

Определим отображение u^α с параметром $\alpha > 0$ на основе операции проектирования:

$$u^\alpha(\psi, x, w, t) = P_U(w + \alpha H_1(\psi, x, t)),\ x \in R^n,\ \psi \in R^n,\ w \in U,\ t \in T.$$

С помощью отображения u^α условие принципа максимума (4) в задаче (1), (2) можно записать в эквивалентном виде:

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t,u), x(t,u), u(t), t), \qquad t \in T. \tag{5}$$

Управление $u \in V$, удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности (4) и (5), называется экстремальным.

Определим отображения $X,\ \Psi,\ V^\alpha$ следующими соотношениями:

$$X(v) = x,\ v \in V,\ x = x(t,v),\ t \in T;$$

$$\Psi(v) = \psi,\ v \in V,\ \psi = \psi(t,v),\ t \in T;$$

$$V^\alpha(\psi, x, v) = v^\alpha,\ \psi \in C(T),\ x \in C(T),\ v \in V,\ v^\alpha(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t), v(t), t),\ t \in T,$$

где $C(T)$ — пространство непрерывных на T функций.

С помощью введенных отображений условие принципа максимума (5) можно представить как задачу о неподвижной точке с оператором управления G_1^α:

$$u = V^\alpha(\Psi(u), X(u), u) = G_1^\alpha(u),\ u \in V. \tag{6}$$

Известное [2] определение особого управления в рассматриваемом классе (1), (2) принимает следующую форму.

Рассмотрим функцию переключения $g(\psi, x, t) = H_1(\psi, x, t)$. Управление $u \in V$ называется особым на основе функции $g(\psi, x, t)$, если для этого управления существует интервал времени $[\theta_1, \theta_2] \subset T$ ненулевой меры, на котором выполняется условие $g(\psi(t,u), x(t,u), t) = 0$.

Сформулируем эквивалентное определение особого управления.

Введем отображение X^α следующим образом:

$$X^\alpha(\psi, v) = x^\alpha,\ \psi \in C(T),\ v \in V,$$

где $x^{\alpha}(t)$, $t \in T$ является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t),t)u^{\alpha}(\psi(t),x(t),v(t),t) + b(x(t),t),\ x(t_0) = x^0. \quad (7)$$

Рассмотрим задачу о неподвижной точке с оператором управления G_2^{α}:

$$u = V^{\alpha}(\Psi(u), X^{\alpha}(\Psi(u),u),u) = G_2^{\alpha}(u),\ u \in V. \quad (8)$$

Рассмотрим функцию переключения $g_1(x,t) = g(\psi(t,u),x,t)$. Если для управления $u \in V$ существует интервал времени $[\theta_1,\theta_2] \subset T$ ненулевой меры, на котором выполняется условие $g_1(x(t),t) = 0$, где $x(t)$ является решением специальной задачи Коши (7), то это управление назовем особым на основе функции $g_1(x,t)$.

Теорема. Особое экстремальное управление $u \in V$ на основе функции переключения $g(\psi,x,t)$ является особым экстремальным управлением на основе функции переключения $g_1(x,t)$ и наоборот. При этом соответствующие особые интервалы совпадают.

2. **Методы поиска особых экстремальных управлений**

На основе условий принципа максимума в форме задач о неподвижной точке (6) и (8) конструируются соответствующие итерационные методы последовательных приближений при $k \geq 0$:

$$v^{k+1} = V^{\alpha}(\Psi(v^k), X(v^k), v^k) = G_1^{\alpha}(v^k),\ v^0 \in V; \quad (9)$$

$$v^{k+1} = V^{\alpha}(\Psi(v^k), X^{\alpha}(\Psi(v^k), v^k), v^k) = G_2^{\alpha}(v^k),\ v^0 \in V. \quad (10)$$

Сходимость итерационных процессов (9), (10) можно обосновать при достаточно малых $\alpha > 0$ на основе известного принципа сжимающих отображений.

Заключение

Применение построенных методов для поиска особых экстремальных управлений на модельных задачах рассматриваемого класса показывает их лучшую сравнительную эффективность по сравнению с известными методами. Предлагаемые методы характеризуются следующими свойствами:

1. нелокальность последовательных приближений управления;
2. вычислительная устойчивость, которой не обладают стандартные методы решения краевой задачи принципа максимума;
3. отсутствие трудоемкой процедуры игольчатого или выпуклого варьирования управления в малой окрестности рассматриваемого приближения управления в отличие от градиентных методов.

Указанные свойства предлагаемых методов неподвижных точек являются важными для повышения эффективности поиска особых экстремальных управлений в рассматриваемом классе линейных по управлению задач оптимального управления.

Библиография

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976. – 392 с.

2. *Васильев О. В.* Лекции по методам оптимизации. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 1994. – 340 с.

3. Булдаев А. С. Операторные уравнения и алгоритмы принципа максимума в задачах оптимального управления // Вестник Бурятского госуниверситета. Математика, информатика. 2020. − №1. – С. 35-53.

Bibliography

1. *Pontryagin L. S., Boltyanskij V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F.* Matematicheskaya teoriya optimal'nyh processov [Mathematical theory of optimal processes.] M.: Science, 1976. – 392 p.

2. *Vasil'ev O. V.* Lekcii po metodam optimizacii [Lectures on optimization methods.] Irkutsk: Izd-vo IGU, 1994. – 340 p.

3. *Buldaev A.S.* Operator Equations and Algorithms of the Maximum Principle in Optimal Control Problems // Bulletin of the Buryat State University. Mathematics, computer science. 2020. − № 1. – P. 35–53.

УДК 517.9

DOI 10.53980/9785907599970_115

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ХАЙЕРСУ-УЛАМУ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ТРАЕКТОРИЯМИ*

Кандрина А.Д.*, Павленко В., Сесекин А.Н.*****
** Уральский федеральный университет, Россия, Екатеринбург, anna_kandrina@mail.ru*
***Уральский федеральный университет, Россия, Екатеринбург, vera.pavlenko.99@mail.ru*
****Уральский федеральный университет, Россия, Екатеринбург, ssesekin@list.ru*

Приведена формализация понятия устойчивости по Хайерсу-Уламу для нелинейных дифференциальных уравнений с разрывными траекториями, решения в который определяются с помощью замыкания множества гладких траекторий в пространстве функций ограниченной вариации. Получены достаточные условия устойчивости по Хайерсу-Уламу для таких уравнений.

Ключевые слова: *устойчивость по Хайерсу-Уламу, обобщенное воздействие, нелинейные системы.*

ON THE HAYERS-ULAM STABILITY OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DISCONTINUOUS TRAJECTORIES

Kandrina A.D.*, Pavlenko V., Sesekin A.N.*****
** Ural Federal University, Russia, Yekaterinburg, anna_kandrina@mail.ru*
*** Ural Federal University, Russia, Yekaterinburg, vera.pavlenko.99@mail.ru*
**** Ural Federal University, Russia, Yekaterinburg, sesekin@list.ru*

A formalization of the Hyers-Ulam stability concept for non-linear differential equations with discontinuous trajectories is given, the solutions to which are determined by closing the set of smooth trajectories in the space of functions of bounded variation. Sufficient conditions for Hyers-Ulam stability for such equations are obtained.

Key words*: Hyers-Ulam stability, generalized action, nonlinear systems.*

Введение

Работа посвящена исследованию свойства устойчивости по Хайерсу-Уламу нелинейных систем дифференциальных с обобщенным воздействием в правой части. Для обыкновенных дифференциальных уравнений с абсолютно непрерывными траекториями эти вопросы рассматривались, например, в [1]. В отличии от уравнений, которые рассматривались в [1], здесь будут рассматриваться дифференциальные уравнения с обобщенным воздействием в правой части. В качестве решения будем понимать поточечные пределы последовательностей абсолютно непрерывных решений, получающиеся в результат аппроксимаций обобщенных воздействий в правой части уравнения суммируемыми функциями [2, 3]. Результаты этой работы отличаются результатов статьи [4] тем, что в [4] используется формализация решений, предложенная в [5]. В этой работе используется упомянутая выше формализация решений, описанная в [2.3]. Для линейных дифференциальных уравнений первого порядка аналогичные вопросы рассматривались в [6]

Для дифференциальных уравнений понятие устойчивости по Хайерсу-Уламу определяется следующим образом (см., например, [1])

Определение 1. Уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x) \tag{1}$$

устойчиво по Хайерсу-Уламу, если существует число $c_f > 0$ такое, что $\forall\, \varepsilon > 0$ и каждого решения неравенства

$$\left|y' - f(t, y)\right| \le \varepsilon, \quad t \in [a, b]$$

существует решение $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее неравенству

$$|y(t) - x(t)| \le c_f \varepsilon, \quad t \in [a, b].$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант 22-21-00714

Очевидно, что такое определение не применимо к уравнениям с обобщенным воздействием в связи с неограниченностью правой части уравнения.

.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(t,x) + B(t,x)\dot{v}(t). \qquad (2)$$

Здесь $x(t), v(t)$ – соответственно n и m-мерные вектор-функции времени, $f(t,x)$ – n-мерная вектор-функция и $B(t,x)$ – $n \times m$-матрица-функция. Если функция $v(t)$ является абсолютно непрерывной, то при известных предположениях на $f(t,x)$ и $B(t,x)$ существует единственное решение уравнения (2) на отрезке $[t_0,\ \vartheta]$, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x^0$.

Если же $v(t)$ будет функцией ограниченной вариации, то производную в уравнении (2) следует понимать в обобщенном смысле [2], а тогда в правой части возникает некорректная операция умножения разрывной функции на обобщенную. Один из возможных способов решения этой основан на определении решения на замыкании множества гладких решений в пространстве функций ограниченной вариации [2, 3]. В связи с тем, что вариация вектор-функции может определяться по разному, отметим, что в этой работе под вариацией m-мерной вектор-функции $v(t)$ понимается

$$var_{[t_0,t]} v(\cdot) = \sup_{T} \sum_{i=0}^{k-1} |v(t_{i+1}) - v(t_i)|,$$

где T - произвольное разбиение отрезка $[t_0,\ \vartheta]$.

Согласно [2], аппроксимируемым решением задачи Коши (1), соответствующим функции ограниченной вариации $v(t)$, будем называть функцию ограниченной вариации $x(t)$, являющуюся поточечным пределом последовательности $x_k(t)$, порожденной последовательностью абсолютно непрерывных функций $v_k(t)$, поточечно сходящейся к $v(t)$, если $x(t)$ не зависит от выбора последовательности $v_k(t)$.

Теорема 1 [2,3]. Предположим, что для $t \in [t_0, \vartheta]$, $x \in R^n$, $v \in R^m$ и все допустимые функции $v(\cdot)$ подчинены ограничению $var_{[t_0,\vartheta]} v(\cdot) \le M$, где M – некоторая положительная постоянная. Вектор-функция $f(t,x)$, и матрица-функция $B(t,x)$ непрерывны по совокупности переменных, удовлетворяют неравенствам

$$\|f(t,x)\| \le k(1 + \|x\|),\ \ \|B(t,x)\| \le k(1 + \|x\|),$$

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \le L_f|x - y|,\ \ \|B(t,x) - B(t,y)\| \le L_B|x - y|,$$

где $L_f,\ L_B, k$ – некоторые положительные постоянные. Также будем предполагать, что элементы матрицы $B(t,x)$ дифференцируемы по переменным x_i и в области определения этой матрицы-функции и в области определения будут выполняться равенства

$$\sum_{v=1}^{n} \frac{\partial b_{ij}(t,x)}{\partial x_v} b_{vl}(t,x) = \sum_{v=1}^{n} \frac{\partial b_{il}(t,x)}{\partial x_v} b_{vj}(t,x)$$

(условие Фробениуса) $i \in \overline{1,n},\ j,l \in \overline{1,m}$

Тогда для всякой $v(t)$, удовлетворяющей выше оговоренным условиям, существует аппроксимируемое решение $x(t)$ задачи Коши (1), которое является решением интегрального уравнения

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\xi, x(\xi)\big)d\square + \int_{t_0}^{t} B\big(\xi, x(\xi)\big)dv^c(\xi) + \sum_{t_i \le t, t_i \in \Omega_-} S\big(t_i, x(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0)\big)$$

$$+ \sum_{t_i \le t, t_i \in \Omega_+} S\big(t_i, x(t_i), \Delta v(t_i + 0)\big),$$

где

$$S(t,x,\Delta v) = z(1) - x,$$
$$\dot{z}(\xi) = B\big(t, z(\xi)\big)v(t), \quad z(0) = x,$$

$\Omega_-(\Omega_+)$ – множество точек левого (правого) разрывов вектор-функции $v(t)$,

$$\Delta v(t - 0) = v(t) - v(t - 0), \qquad \Delta v(t + 0) = v(t + 0) - v(t).$$

Определение 2. Будем говорить, что дифференциальное уравнение (2) устойчиво по Хайерсу-Уламу на $[t_0, v]$, если для любой вектор-функции $y \in BY[t_0, v]$, удовлетворяющей неравенству

$$\left| y(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(\xi, y(\xi))d\square - \int_{t_0}^{t} B(\xi, y(\xi))dv^c(\xi) + \sum_{t_i \le t, t_i \in \Omega_-} S(t_i, y(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0)) \right.$$

$$\left. + \sum_{t_i \le t, t_i \in \Omega_+} S(t_i, y(t_i), \Delta v(t_i + 0)) \right| \le \varepsilon,$$

для любого $\varepsilon > 0$ и любого решения неравенства (6) существует положительное вещественное число C и решение уравнения (2) $x(t)$, удовлетворяющее неравенству

$$|y(t) - x(t)| < \varepsilon C$$

для любого $t \in [t_0, v]$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда дифференциальное уравнение (2) устойчиво по Хайерсу-Уламу.

Заключение

Проведена формализация понятия устойчивости по Хайерсу-Уламу нелинейных дифференциальных уравнений с обобщенный воздействием в правой части и установлен факт устойчивости этих уравнений по Хайерсу-Уламу.

Библиография

1. *Rus I.A.* Ulam stability of ordinary differential equations // Studia Uinv. “BABES–BOLYAI”, Mathematica. 2009. V. LIV. No. 4, P. 125--133.

2. *Zavalishchine S.T., Sesekin A.N.* Dynamic Impulse Systems: Theory and Applications. Dolrbrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. – 233 p.

3. *Сесекин А.Н.* Динамические системы с импульсной структурой // Труды ИММ УрО РАН. 2000. - Том 6. - С. 497-514.

4. *Wang J.R., Feckan M., Zhou Y.* Ulam’s type stability of impulsive ordinary differential equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2012. Vol. 395, No. 1. pp. 258–264.

5. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием ~-- Киев.: Вища школа, 1987.

6. *Зайнуллина Э.З., Павленко В.С., Сесекин А.Н., Гредасова Н.В.* Об устойчивости по Уламу-Хайерсу решений дифференциальных уравнений первого порядка с обобщенным воздействием // Материалы Воронежской международной весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения–XXXII», Воронеж, 3–9 мая 2021 г. Часть 2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 209, ВИНИТИ РАН, М., 2022. С. 25–32.

Bibliography

1. *Rus I.A.* Ulam stability of ordinary differential equations // Studia Uinv. “BABES–BOLYAI”, Mathematica. 2009. V. LIV. No. 4, P. 125--133.

2. *Zavalishchine S.T., Sesekin A.N.* Dynamic Impulse Systems: Theory and Applications. Dolrbrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. – 233 p.

3. Sesekin A.N. Dynamic systems with nonlinear impulse structure // Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.), 2000no, suppl. 2, S158–S172.

4. *Wang J.R., Feckan M., Zhou Y.* Ulam’s type stability of impulsive ordinary differential equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2012. Vol. 395, No. 1. pp. 258–264.

5. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive Differential Equations, World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A: Monographs and Treatises, vol. 14, World Scientific, New Jersey, 1995. 472 p.

6. *Zainullina E.Z., Pavlenko V.S., Sesekin A.N., Gredasova N.V.* On the Ulam-Hayers stability of solutions of first-order differential equations with generalized action // Proceedings of the Voronezh International Spring Mathematical School “Modern Methods of the Theory of Boundary Value Problems. Pontryagin Readings – XXXII”, Voronezh, May 3–9, 2021 Part 2, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Modern mat. and her app. Subject. Obz., 209, VINITI RAN, Moscow, 2022, pp. 25–32.

УДК 531.36

DOI 10.53980/9785907599970_118

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА В ОДНОМ СПЕЦИАЛЬНОМ СЛУЧАЕ[1]

Косов А.А.*, Семенов Э.И.*

**Институт динамики систем и теории управления имени В.М.Матросова Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск, Россия e-mail: kosov_idstu@mail.ru*

Изучаются дифференциальные уравнения движения гиростата Горячева-Сретенского с дополнительным моментом циркулярно-гироскопических сил. Найдены все стационарные решения на инвариантном множестве нулевого уровня интеграла площадей и проведен анализ их устойчивости. Для случая совпадения точки подвеса с центром масс и действия гироскопического момента специального вида выполнено интегрирование в квадратурах.

Ключевые слова: *гиростат Горячева-Сретенского, стационарные решения, устойчивость, интегрирование в квадратурах.*

ON THE SOLUTIONS PROPERTIES OF A GYROSTAT MOTION EQUATIONS IN ONE SPECIAL CASE

Kosov A.A.*, Semenov E.I.*

**Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch Russian Academy of Sciences, Russia, Irkutsk e-mail: kosov_idstu@mail.ru*

The differential equations of motion of the Goryachev-Sretensky gyrostat with an additional moment of circular-gyroscopic forces are studied. All stationary solutions are found on the invariant set of the zero level of the area integral and their stability is analyzed. For the case of coincidence of the suspension point with the center of mass and the action of a gyroscopic moment of a special type, integration in quadratures is performed.

Keywords: *Goryachev-Sretensky gyrostat, stationary solutions, stability, quadrature integration.*

1. Введение.

В динамике твердого тела с неподвижной точкой важное значение имеют случаи частичной интегрируемости, когда удается получить дополнительный частный интеграл [1]. Один из таких частично интегрируемых случаев для уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки был найден Д.Н.Горячевым [2], который показал существование четвертого по счету интеграла на инвариантном множестве нулевого уровня интеграла площадей. Интегрирование дифференциальных уравнений движения с использованием дополнительного интеграла было выполнено С.А.Чаплыгиным [3], установившим, что решения в общем случае представляются гиперэллиптическими функциями времени. Эти результаты были распространены Л.Н.Сретенским [4] на более общие по сравнению с твердым телом уравнения движения гиростата, содержащие дополнительный параметр – вектор гиростатического момента.

Исследования дифференциальных уравнений движения гиростата успешно продолжаются и в настоящее время по нескольким направлениям (см., например, [5-7] и цитированную там литературу).

Объектом исследования в докладе являются уравнения движения гиростата Горячева-Сретенского. Найдены все стационарные решения, лежащие в множестве нулевого уровня интеграла площадей. Получены условия устойчивости найденных стационарных решений. Рассматривается случай совпадения точки подвеса с центром масс, но при этом действуют гироскопические моменты специального вида. Для этого случая выполнено интегрирование уравнений движения в квадратурах, приведены примеры явного представления решений элементарными функциями времени.

2. Уравнения движения и первые интегралы.

Рассмотрим уравнения движения гиростата Горячева-Сретенского при действии дополнительного момента циркулярно-гироскопических сил

[1] Работа выполнена при поддержке РНФ, проект № 22-29-00819.

$$4C\dot{p} = 3Cqr - \lambda_3 q + L(q\gamma_3 - r\gamma_2),$$
$$4C\dot{q} = -3Cpr + \lambda_3 p + a\gamma_3 + L(r\gamma_1 - p\gamma_3), \quad (1)$$
$$C\dot{r} = -a\gamma_2 + L(p\gamma_2 - q\gamma_1)$$
$$\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3,\ \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1,\ \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2. \quad (2)$$

Здесь $\omega = col(p,q,r)$ – вектор угловой скорости, $\gamma = col(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ – единичный вектор оси симметрии силового поля, заданные проекциями на оси связанной системы координат, матрица моментов инерции диагональная $I = diag(4C,4C,C)$, потенциал линейный $U = a\gamma_1$.

Для системы (1), (2) первые интегралы записываются так

$$J_1 = 4Cp^2 + 4Cq^2 + Cr^2 + 2a\gamma_1 = c_1 = const \quad (3)$$
$$J_2 = 4Cp\gamma_1 + 4Cq\gamma_2 + \gamma_3(Cr + \lambda_3) = c_2 = const \quad (4)$$
$$J_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \quad (5)$$

В [4] установлено, что при $L = 0$ на инвариантном множестве $J_2 = 0$, задаваемом нулевым уровнем интеграла площадей (4), система (1), (2) имеет первый интеграл

$$J_4 = (Cr - \lambda_3)(p^2 + q^2) - ap\gamma_3 = c_4 = const \quad (6)$$

с произвольной постоянной $c_4 = const$. Наличие четырех известных первых интегралов (3), (4), (5) и (6) позволяет выполнить на множестве $J_2 = 0$ интегрирование в квадратурах [4]. Однако выяснение поведения решений, расположенных на множестве $J_2 = 0$, и их свойства устойчивости, в том числе и по отношению к близким решениям, лежащим вне этого множества $J_2 = 0$, представляют несомненный интерес.

В докладе будут приведены стационарные решения системы (1), (2) и условия их устойчивости, как достаточные, получаемые методом интегральных связок Четаева, так и необходимые, устанавливаемые на основе анализа корней характеристического уравнения.

3. Построение стационарных решений на множестве $J_2 = 0$.

Легко видеть, что для всех стационарных решений выполняются равенства $\underline{q} = \underline{\gamma}_2 = 0$. Для других компонент стационарного решения, лежащего на инвариантном множестве $J_2 = 0$, получаем систему трех уравнений

$$-3C\underline{p}\underline{r} + \lambda_3\underline{p} + a\underline{\gamma}_3 = 0, \underline{p}\underline{\gamma}_3 - \underline{r}\underline{\gamma}_1 = 0, 4C\underline{p}\underline{\gamma}_1 + \underline{\gamma}_3\left(C\underline{r} + \lambda_3\right) = 0 \quad (7)$$

Из (7) сразу следует, что стационарными решениями системы (1), (2) будут два положения покоя (на них все компоненты угловой скорости равны нулю)

$$\underline{p} = \underline{q} = \underline{r} = \underline{\gamma}_2 = \underline{\gamma}_3 = 0,\ \underline{\gamma}_1 = \sigma = \pm 1 \quad (8)$$

Из второго и третьего уравнений системы (7) с учетом геометрического интеграла (5) находим

$$\underline{\gamma}_3{}^2 = \frac{4C\underline{r}}{3C\underline{r} - \lambda_3} \quad (9)$$

А из первого уравнения (7) следует

$$\underline{p} = \frac{a\underline{\gamma}_3}{3C\underline{r} - \lambda_3} \quad (10)$$

Отсюда получим уравнение 4-й степени $F_4(\underline{r}) = \left(C\underline{r} + \lambda_3\right)\left(3C\underline{r} - \lambda_3\right)^3 + 16a^2C^2 = 0$, для нахождения $\underline{r}$, удовлетворяющих неравенствам

$$0 \le \frac{4C\underline{r}}{3C\underline{r} - \lambda_3} \le 1,\ \frac{C\underline{r} + \lambda_3}{3C\underline{r} - \lambda_3} \le 0. \quad (11)$$

Если параметры системы удовлетворяют неравенству $16a^2C^2 - 9\lambda_3^4 > 0$, то система (1), (2) не имеет на множестве $J_2 = 0$ других стационарных решений, кроме состояний покоя (8).

Если параметры системы удовлетворяют равенству $16a^2C^2 - 9\lambda_3^4 = 0$, то соответствующие стационарные решения находятся в явном виде. При $a = -\frac{3\lambda_3^2}{4C} < 0$ система (1), (2) имеет два стационарных решения

$$\underline{p} = \pm\frac{\lambda_3\sqrt{2}}{6C}, \underline{q} = 0, \underline{r} = -\frac{2\lambda_3}{3C}, \underline{\gamma}_1 = -\frac{1}{3}, \underline{\gamma}_2 = 0, \underline{\gamma}_3 = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

При $a = \frac{3\lambda_3^2}{4C} > 0$ система (1), (2) имеет два стационарных решения

$$\underline{p} = \mp\frac{\lambda_3\sqrt{2}}{6}, \underline{q} = 0, \underline{r} = -\frac{2\lambda_3}{3C}, \underline{\gamma}_1 = \frac{1}{3}, \underline{\gamma}_2 = 0, \underline{\gamma}_3 = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Если параметры системы удовлетворяют неравенству $16a^2C^2 - 9\lambda_3^4 < 0$, то на инвариантном множестве $J_2 = 0$ имеется либо два, либо четыре стационарных решения, являющихся, перманентными вращениями (на них все компоненты вектора угловой скорости постоянны).

4. Анализ устойчивости стационарных решений

Утверждение 1. *Состояние покоя* (8)*, соответствующее значениюσ* $= -sign(a)$*, устойчиво по Ляпунову*.

Утверждение 2. *Состояние покоя* (8)*, соответствующее значениюσ* $= sign(a)$*, неустойчиво по Ляпунову при* $L = 0$. При этом в случае $4C|a| > \lambda_3^2$ для всех достаточно больших значений модуля $|L|$ обеспечивается гироскопическая стабилизация в линейном приближении, т.е. все корни характеристического уравнения для системы линейного приближения (1), (2) будут лежать на мнимой оси.

В докладе будут приведены также условия устойчивости перманентных вращений.

5. Интегрируемость в квадратурах

Рассмотрим теперь тот случай, когда действует дополнительный момент гироскопических сил, и уравнения движения вместо (1) имеют вид

$$\begin{gathered} 4C\dot{p} = 3Cqr - \lambda_3 q + k_2 r\gamma_2 - k_3 q\gamma_3 + L(q\gamma_3 - r\gamma_2), \\ 4C\dot{q} = -3Cpr + \lambda_3 p + a\gamma_3 + k_3 p\gamma_3 - k_1 r\gamma_1 + L(r\gamma_1 - p\gamma_3), \\ C\dot{r} = -a\gamma_2 + k_1 q\gamma_1 - k_2 p\gamma_2 + L(p\gamma_2 - q\gamma_1) \end{gathered} \tag{12}$$

Утверждение 3. *Если*$L = L(\gamma_3)$, $k_1 = k_2$ и $a = 0$ (*т.е. точка подвеса совпадает с центром масс), то система* (12), (2) *имеет четыре первых интеграла*

$$J_1 = 4Cp^2 + 4Cq^2 + Cr^2 = c_1 = const$$

$$J_2 = 4Cp\gamma_1 + 4Cq\gamma_2 + \gamma_3(Cr + \lambda_3) + \frac{1}{2}(k_1\gamma_1^2 + k_2\gamma_2^2 + k_3\gamma_3^2) = c_2 = const$$

$$J_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad J_4 = Cr - k_1\gamma_3 + \int_0^{\gamma_3} L(s)ds = c_4 = const$$

и полностью интегрируется.

В докладе будет представлен способ явного процесса интегрирования нелинейной системы дифференциальных уравнений движения гиростата (12), (2), а также приведен ряд примеров построенных этим способом точных решений, выражаемых элементарными или специальными функциями.

Библиография

1. *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения твердого тела около неподвижной точки. – М.: Гостехиздат, 1953. – 287 с.

2. *Горячевъ Д.Н.* О движеніи тяжелаго твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки въ случаѣ *A*=*B*=4*C* // Матем. сб. 1900. Т. 21. Вып.:3. С. 431–438.

3. *Чаплыгин С.А.* Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке // Труды Отд. физ. Наук Об-ва любителей естествознания. 1901. Т. 10. Вып. 2. С. 32-34.

4. *Сретенский Л.Н.* О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата // Докл. АНСССР. 1963. Т. 149. № 2. С. 292–294.

5. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // J. Egyptian. Math. Soc., 2017, vol. 25, pp. 216–219.

6. *Kosov A.A., Semenov E.I.* On first integrals and stability of stationary motions of gyrostat // Physica D: Nonlinear Phenomena, 2022, vol. 430, 133103. doi.org/10.1016/j.physd.2021.133103.

7. *Lanchares V., Iñarrea M., Pascual A.I., Elipe A.* Stability Conditions for Permanent Rotations of a Heavy Gyrostat with Two Constant Rotors // Mathematics. 2022. 10. 1882. doi.org/10.3390/math10111882.

Bibliography

1. *Golubev, V.V.* Lectures on Integration of the Equations of Motion of a Rigid Body about a Fixed Point. Israeli Program for Scientific Translations, Israel 1960. 287 p.

2. *Goryachev D.N.* On the motion of a heavy solid body around a fixed point in the case A=B=4C // Sbornik: Mathematics. 1900. Vol. 21, Issue:3. pp. 431-438. (in Russian).

3. *Chaplygin S.A.* A new case of rotation of a heavy solid body propped up at one point // Proceedings of the Department of Physic. sciences of the natural science lovers. 1901. Vol. 10, Issue 2. pp. 32-34. (in Russian).

4. *Sretenskii L.N.* Some Integrability Cases for the Equations of Gyrostat Motion // Dokl. USSR Academy of Sciences. 1963.vol. 149, No 2, pp. 292–294. (in Russian).

5. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // J. Egyptian. Math. Soc., 2017, vol. 25, pp. 216–219.

6. *Kosov A.A., Semenov E.I.* On first integrals and stability of stationary motions of gyrostat // Physica D: Nonlinear Phenomena, 2022, vol. 430, 133103. doi.org/10.1016/j.physd.2021.133103.

7. *Lanchares V., Iñarrea M., Pascual A.I., Elipe A.* Stability Conditions for Permanent Rotations of a Heavy Gyrostat with Two Constant Rotors // Mathematics. 2022. 10. 1882. doi.org/10.3390/math10111882.

УДК 517. 93, 517.937

DOI 10.53980/9785907599970_122

К РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ РЕАЛИЗАЦИИ *APL*-РЕГУЛЯТОРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ АДАПТИВНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1*]

А.В. Данеев[1], А.В. Лакеев[2], Ю.Э. Линке[3], В.А. Русанов[2]

[1] *Иркутский государственный университет путей сообщения, daneev@mail.ru*

[2] *Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, lakeyev@icc.ru*

[3] *Иркутский национальный исследовательский технический университет, linkeyurij@gmail.com*

Исследовано существование адаптивного полилинейного регулятора дифференциальной системы второго порядка в гильбертовом пространстве. Адаптивный регулятор позволяет для траекторных пучков, индуцированных разными полилинейными регуляторами, объединить эти пучки в семейство допустимых решений этой системы. Задача решается на основе анализа полуаддитивности и непрерывности оператора Релея−Ритца, построенного из "неадаптивной части" моделируемой системы.

Ключевые слова: *теория реализации, адаптивный регулятор, оператор Релея−Ритца.*

ON PROBLEM OF EXISTENCE OF *APL*-REGULATOR FOR SECOND-ORDER DIFFERENTIAL ADAPTIVE SYSTEM

A.V. Daneev[1], A.V. Lakeyev[2], Yu.É. Linke[3], V.A. Rusanov[2]

[1] *Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia, daneev@mail.ru*

[2] *Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia, lakeyev@icc.ru*

[3] *Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia, linkeyurij@gmail.com*

The existence of an adaptive polylinear regulator of a differential system of the second order in a Hilbert space is investigated. The adaptive regulator allows for the trajectory beams of an differential system, with different polylinear regulator, to combine these beams into a subfamily of its acceptable solutions. This problem relates to the inverse problems of nonlinear evolutionary equations in Hilbert space and is solved on the basis of a analysis of the semiadditivity and continuity of the Rayleigh−Ritz nonlinear operator.

Key-Words: *inverse problems of evolution equations, adaptive regulator, the Rayleigh−Ritz operator.*

Введение

Постановки теории реализации [1, с. 21] в числе обратных задач эволюционных уравнений [2] достаточно актуальны [3−5]. К ним относится [3] проблема существования *адаптивного полилинейного регулятора* (APL-регулятора) дифференциальной системы (D-системы) второго порядка. Адаптивный регулятор делает корректным включение в класс допустимых решений D-системы объединения траекторных пучков, каждый из которых индуцирован своим *индивидуальным* PL-регулятором. В целом качественный анализ задачи реализации APL-регулятора развивает аналитическую теорию *нелинейного адаптивного управления* [1, с. 64] неавтономных регулируемых D-систем высших порядков.

1. Постановка задачи

Пусть $(X,\|\cdot\|_X)$, $(Y,\|\cdot\|_Y)$, $(Z,\|\cdot\|_Z)$, $i=1,\overline{n}$ – вещественные сепарабельные гильбертовы пространства. Тогда пространство $U:=Y\times Z_1\times\overline{\ }\times Z_n$ с нормой $\|(y,z_1,\overline{\ },z_n)\|_U:=(\|y\|_Y^2+\sum_{i=1,\overline{n}}\|z_i\|_Z^2)^{1/2}$, тоже гильбертово. Как обычно $(L(Y,X),\|\cdot\|_{L(Y,X)})$, $(L(X,X),\|\cdot\|_{L(X,X)})$, $(L(Z_i,X),\|\cdot\|_{L(Z_i,X)})$ – пространства с операторными нормами всех линейных непрерывных операторов, действующих из Y,X,Z_i в X, X^i

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект 121041300056-7).

– i-я декартова степень X, $\mathsf{L}(X^i, Z_i)$ – пространство всех i-линейных (полилинейных) отображений из X в Z_i.

Пусть T – отрезок вещественной прямой R с мерой Лебега μ, при этом, если $(\mathsf{B}, \|\cdot\|)$ – банахово пространство, то $\mathrm{L}_p(T, \mathsf{B})$, $p \in [1, \infty)$ – фактор-пространство всех интегрируемых по Бохнеру отображений $f : T \to \mathsf{B}$ с нормой $(\int_T \|f(\tau)\|^p \mu(d\tau))^{1/p} < \infty$, $\mathrm{L}_\infty(T, \mathsf{B})$ – фактор-пространство μ-измеримых и μ-существенно ограниченных функций из T в B. Кроме того, $AC^1(T, X)$ – множество всех функций $g : T \to X$, первая производная $g^{(1)}$ которых является абсолютно непрерывной на T функцией.

В числе важных вспомогательных гильбертовых функциональных пространств рассмотрим

$$H_2 := \mathrm{L}_2(T, Y) \times \mathrm{L}_2(T, Z_1) \times \ldots \times \mathrm{L}_2(T, Z_n),$$

$$\|(h_0, \ldots, h_n)\|_H := (\int_T \|(h_0(\tau), \ldots, h_n(\tau))\|_U^2 \mu(d\tau))^{1/2}, \quad (h_0, \ldots, h_n) \in H_2.$$

Нам также ниже понадобится банахово пространство кортежей оператор-функций, имеющее вид:

$$\mathbf{L}_2 := \mathrm{L}_2(T, L(Y, X)) \times \mathrm{L}_2(T, L(Z_1, X)) \times \ldots \times \mathrm{L}_2(T, L(Z_n, X)),$$

$$\|(B_0, \ldots, B_n)\|_{\mathbf{L}} := (\int_T (\|B_0(\tau)\|_{L(Y,X)}^2 + \sum\nolimits_{i=1,\ldots,n} \|B_i(\tau)\|_{L(Z,X)}^2) \mu(d\tau))^{1/2}.$$

Теперь примем, что на интервале T заданы три оператор-функции A_0, A_1, A_2 со свойствами:

$$A_0, A_1 \in \mathrm{L}_1(T, L(X, X)),\ A_2 \in \mathrm{L}_\infty(T, L(X, X)),\ \mu\{t \in T : A_2(t) = 0 \in L(X, X)\} = 0,$$

и связанный с ними позиционно-дифференциальный оператор $\boldsymbol{D} : AC^1(T, X) \to \mathrm{L}_1(T, X)$ вида:

$$g \mapsto \boldsymbol{D}(g) := A_2\, g^{(2)} + A_1\, g^{(1)} + A_0\, g.$$

Далее считаем, что посредством фиксации $(B_{01}, \ldots, B_{n1}), (B_{02}, \ldots, B_{n2}) \in \mathbf{L}_2$, $D_i \in \mathsf{L}(X^i, Z_i)$, $i = 1, \ldots, n$ заданы два PL-регулятора $\boldsymbol{PL}_j : AC^1(T, X) \times \mathrm{L}_2(T, Y) \to \mathrm{L}_1(T, X)$, $j = 1, 2$, имеющих представление:

$$(g, u) \mapsto \boldsymbol{PL}_j(g, u) : B_{0j} u + \sum\nolimits_{i=1,\ldots,n} B_{ij} D_i(g, \ldots, g),\ j = 1, 2,\ (B_{01}, \ldots, B_{n1}) \neq (B_{02}, \ldots, B_{n2}).$$

Сверх того, пусть $\Pi := AC^1(T, X) \times H_2$, и пусть определены N_1, N_2, $N_1 \cap N_2 = \varnothing$ – множества

$$N_1 \subset \{(x, u, D_1(x), \ldots, D_n(x, \ldots, x)) \in \Pi\},\ \mathrm{Card}\, N_1 \leq \exp \aleph_0,$$

$$N_2 \subset \{(x, u, D_1(x), \ldots, D_n(x, \ldots, x)) \in \Pi\},\ \mathrm{Card}\, N_2 \leq \exp \aleph_0,$$

которые суть *траекторно-динамические пучки*, индуцированные двумя D-системами вида:

$$\boldsymbol{D}(x) = \boldsymbol{PL}_1(x, u)\ \ \forall (x, u, D_1(x), \ldots, D_n(x, \ldots, x)) \in N_1,$$

$$\boldsymbol{D}(x) = \boldsymbol{PL}_2(x, u)\ \ \forall (x, u, D_1(x), \ldots, D_n(x, \ldots, x)) \in N_2;$$

здесь (и ниже в D-уравнении (1)) равенства рассматриваются как тождества в пространстве $\mathrm{L}_1(T, X)$.

Формулировка APL-задачи: определить в терминах тройки операторов (A_0, A_1, A_2) и геометрических свойств траекторно-динамического пучка $\widetilde{N} := N_1 \cup N_2$ условия существования кортежа оператор-функций $(\widetilde{B}_0, \ldots, \widetilde{B}_n) \in \mathbf{L}_2$ (оператор-функции APL-регулятора), для которого справедливо

$$\boldsymbol{D}(x) = \boldsymbol{APL}(x, u, \widetilde{B}_0, \ldots, \widetilde{B}_n)\ \ \forall (x, u, D_1(x), \ldots, D_n(x, \ldots, x)) \in \widetilde{N},$$

$$\boldsymbol{APL}(x, u, \widetilde{B}_0, \ldots, \widetilde{B}_n) := \widetilde{B}_0 u + \sum\nolimits_{i=1,\ldots,n} \widetilde{B}_i D_i(x, \ldots, x). \tag{1}$$

2. Теоремы существования APL-регулятора

Пусть $\mathrm{L}(T, R)$ – пространство всех μ-измеримых на T вещественных функций, $\leq_{\mathrm{L}}$ – квазиупорядочение в $\mathrm{L}(T, R)$ такое, что $f_1 \leq_{\mathrm{L}} f_2$, если $f_1(t) \leq f_2(t)$ μ-почти всюду в T, и пусть $\sup_{\mathrm{L}} W$ – наименьшая верхняя $\leq_{\mathrm{L}}$-грань для подмножества $W \subset \mathrm{L}(T, R)$, если эта $\leq_{\mathrm{L}}$-грань существует.

Определение 1 (см. замечание 2 [3]). *Оператор* $\Psi : AC^1(T,X)\times H_2 \to \mathrm{L}(T,R)$, *имеющий вид*

$$t \in T \quad \Psi(x,h)(t) := \begin{cases} \|\boldsymbol{D}(x)(t)\|_X \times \|h(t)\|_U^{-1}, \text{ если } h(t) \neq 0 \in U, \\ 0 \in R, \text{ если } h(t) = 0 \in U, \end{cases}$$

где $x \in AC^1(T,X),\ h \in H_2$, *следуя* [5], *назовем оператором Релея–Ритца.*

Определение 2. *Пусть* $p \in [1,\infty)$. *Тогда* $E \subset \Pi$ *назовем* (Ψ, p)*-множеством, если*

$$(\phi',\phi'') \in E\times E \Rightarrow \Psi(\phi'+\phi'') \leq_{\mathrm{L}} p\Psi(\phi') + p\Psi(\phi'').$$

Лемма 1. *Для любой вектор-функции* $\phi \in \Pi \setminus \{0\}$ *и действительного числа* $p \in [1,\infty)$ *существует* $E \subset \Pi$ *– максимальное линейное функциональное* (Ψ, p)*-множество, содержащее* ϕ.

Теорема 1 (достаточное условие). *Задача реализации* APL*-регулятора* D*-системы* (1) *разрешима, если найдется* $p \in [1,\infty)$, *для которого* $\operatorname{Span} \widetilde{N}$ *– суть* (Ψ, p)*-множество.*

Теперь прибегнем к *непрерывности* оператора Релея–Ритца [5]. С этой целью введем на $\mathrm{L}(T,R)$ топологию, порождаемую μ-сходимостью по мере μ, что эквивалентно [5] ρ-сходимости в метрике

$$\rho(f_1,f_2) = \int_T (1+|f_1(\tau)-f_2(\tau)|)^{-1}\,|f_1(\tau)-f_2(\tau)|\,\mu(d\tau).$$

Лемма 2. *Пусть* $(AC^1(T,X)\times H_2, \rho^*)$ *– метрическое пространство с метрикой*

$$\rho^*((g,h),(\hat g,\hat h)) := \rho(\|g\|_X, \|\hat g\|_X) + \rho(\|h\|_U, \|\hat h\|_U) + \mu(\operatorname{supp}\|h\|_U \,\Delta\, \operatorname{supp}\|\hat h\|_U),$$

где $g,\hat g \in AC^1(T,X),\ h,\hat h \in H_2$, Δ *– симметрическая разность. Тогда справедливы утверждения*:

(i) *оператор Релея–Ритца* $\Psi : (AC^1(T,X)\times H_2, \rho^*) \to (\mathrm{L}(T,R),\rho)$ *является непрерывным*;

(ii) *если* $\operatorname{Card}\widetilde{N} < \aleph_0$ *и* $\operatorname{supp}\|\varphi\|_U = T \pmod\mu\ \forall \varphi \in \operatorname{Span}\widetilde{N}\setminus\{0\}$, *то* $\Psi[\operatorname{Span}\widetilde{N}]$ *–* ρ*-компакт.*

Теорема 2 (необходимое условие). *Пусть* $\operatorname{Card}\widetilde{N} < \aleph_0$, $\operatorname{supp}\|\varphi\|_U = T \pmod\mu\ \forall \varphi \in \operatorname{Span}\widetilde{N}\setminus\{0\}$. *Тогда, если обратная задача* (1) *разрешима, то существует* $\sup_{\mathrm{L}} \Psi[\operatorname{Span}\widetilde{N}]$, *что эквивалентно*

$$\lim\{\rho(\sup_{\mathrm{L}} W_k, \sup_{\mathrm{L}} W_m) : k\to\infty,\ m\to\infty\} = 0, \tag{2}$$

где $W_k = \cup\{V_i : i = 1,\ldots,k\}$, V_i $(i = 1,2,\ldots)$ *– любая конечная* i^{-1}*-сеть в пространстве* $(\Psi[\operatorname{Span}\widetilde{N}],\rho)$.

Ясно, что $W_k = \{w_{1,k},\ldots,w_{q,k}\} \subset \Psi[\operatorname{Span}\widetilde{N}]$, но возможно $\sup_{\mathrm{L}} W_k \notin \Psi[\operatorname{Span}\widetilde{N}]$, что в общем случае не гарантирует равенство (2), при этом $\sup_{\mathrm{L}} W_k$ равна функции $\mathbf{w}_{q,k}$, вычислимой рекуррентно:

$$\mathbf{w}_{1,k} := w_{1,k},\ \mathbf{w}_{j+1,k} := 2^{-1}(\mathbf{w}_{j,k} + w_{j+1,k} + |\,\mathbf{w}_{j,k} - w_{j+1,k}\,|),\quad j = 2,\ldots,q-1.$$

Заключение

Решение обратной задачи (1) приводит к обобщению теоремы 3 [3], рассматривая APL-регулятор как *полилинейное адаптивное управление* [1, с. 64], например, в нелинейном нейроморфном моделировании [4, 6], попутно углубляя теорию апостериорного построения неавтономных гиперболических систем, в том числе с APL-регуляторами, обладающими минимальной операторной $\|\cdot\|_{\mathrm{L}}$-нормой.

Полученные результаты применимы к APL-регуляторам с операторами $D_j \in \mathrm{L}(X^j\times Y, Z_j)$, в которых в роли дополнительных переменных k-раз $(k \leq j)$ выступает производная траектории $x^{(1)}$ и 1-раз программное управление u; ясно, что в данной постановке $D_j(x,\ldots,x,x^{(1)},\ldots,x^{(1)},u) \in \mathrm{L}_2(T,Z_j)$.

Библиография

1. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.

2. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009. – 458 с.

3. *Лакеев А.В., Линке Ю.Э., Русанов В.А.* К реализации полилинейного регулятора дифференциальной системы второго порядка в гильбертовом пространстве // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 8. С. 1098−1109.

4. *Daneev A.V., Lakeyev A.V., Rusanov V.A., Plesnyov P.A.* Differential nonautonomous representation of the integrative activity of a neural population by a bilinear second-order model with delay // Lecture Notes in Networks and Systems. 2022. Vol. 319. P. 191–199.

5. *Лакеев А.В., Линке Ю.Э., Русанов В.А.* Метрические свойства оператора Релея−Ритца // Изв. вузов. Матем. 2022. № 9. С. 54−63.

6. *Brzychczy S., Poznanski R.* Mathematical Neuroscience. Academic Press. 2013. 208 p.

Bibliography

1. *R.E. Kalman, P.L. Falb and M.A Arbib.* Topics in Mathematical System Theory. N.Y.: McGraw-Hill. 1969.

2. *S.I. Kabanikhin.* Inverse and Ill-Posed Problems. Novosibirsk: Siberian Scientific Publishing Department, 2009 (in Russian).

3. *A.V. Lakeyev, Yu.É. Linke and V.A. Rusanov.* Realization of a polylinear controller as a second-order differential system in a Hilbert space. *Differential Equations*. 2017. Vol. 53. N 8. P. 1070−1081.

4. *A.V. Daneev, A.V. Lakeyev, V.A. Rusanov and P.A. Plesnyov.* Differential non-autonomous representation of the integrative activity of a neural population by a bilinear second-order model with delay. *Lecture Notes in Networks and Systems*. 2022. Vol. 319. P. 191–199.

5. *A.V. Lakeyev, Yu.É. Linke and V.A. Rusanov.* Metric properties of the Rayleigh−Ritz operator. *Russian Mathematics*. 2022. Vol. 66. N 9. P. 46−53.

6. *S. Brzychczy and R. Poznanski.* Mathematical Neuroscience. Academic Press. 2013.

УДК 517.95

[1]УДК 519.7

DOI 10.53980/9785907599970_126

МОДЕЛИ ПОЛИТИЧЕСКОГО СОЗНАНИЯ ИНДИВИДА[*]

Маренко В. А. [*], Мильчарек Т. П. [**], Мильчарек Н. А. [**], Ложников А.Е.[**]

[*]*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия, Новосибирск*
marenko@ofim.oscsbras.ru
[**]*Омский государственный политехнический университет, Омск, Россия*

Современная социально-политическая реальность предопределяет актуальность исследования аспектов ценностных ориентиров, формируемых в сознании людей. Для их изучения проведено экспериментальное исследование с участием более 500 респондентов г. Омска различного возрастного и профессионального состава. Эмпирические данные использованы для построения моделей с применением теории нечетких множеств. Создана когнитивная модель «состояние индивида» с идеологией экстремизма и позитивной идеологией. Проведен симплициальный анализ когнитивной модели для выявления латентных связей между факторами. Вычислительный эксперимент подтвердил гипотезу об ухудшении «политического сознания» индивида при имитации увеличения влияния факторов «радикализм» и «национализм».

***Ключевые слова**: модель, когнитивный подход, политическое сознание, состояние индивида.*

MODEL OF AN INDIVIDUAL`S POLITICAL CONSCIOUSNESS

Marenko V.A. [*], Milcharek T.P. [**], Milcharek N.A. [**], Loznikov A.E[**]

[*]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Russia, Novosibirsk, marenko@ofim.oscsbras.ru*
[**]*Omsk State Technical University, Russia, Omsk*

The modern socio-political reality determines the relevance of the study of aspects of value orientations formed in the minds of people. To study them, an experimental study was conducted with the participation of more than 500 respondents from Omsk of various age and professional composition. Empirical data are used to construct models using fuzzy set theory. A cognitive model of the "state of the individual" with the ideology of extremism and positive ideology has been created. A simplicial analysis of the cognitive model was carried out to identify latent connections between factors. The computational experiment confirmed the hypothesis about the deterioration of the "political consciousness" of an individual with an increase in the influence of the factors "radicalism" and "nationalism".

***Keywords**: model, cognitive approach, political consciousness, state of the individual.*

Введение

Формирование идейных установок в сознании человека обусловлено влиянием информации, обладающей определенным идеологическим смыслом. Различные идеологические течения (неолиберализм, национализм, коммунизм и др.) руководствуются разнообразными социальными принципами и ценностными ориентирами [1]. Под современным термином «радикализм» кроются признаки известного всем термина – экстремизм [2].

1. Постановка задачи

Экстремистские проявления стали неотъемлемыми фактами нашей жизни, поэтому социально-политическая реальность, в том числе в условиях СВО, предопределяет актуальность осмысления экстремизма и его исследования на основе различных методов как важнейшей задачи.

2. Нечеткие модели

Обработка эмпирических данных с применением нечетких множеств, показала деление идеологических компонентов сознания индивидов на две группы: национализм и радикализм; патриотизм, неославянофильство, неолиберализм и коммунизм (рис. 1). На рисунке 1 приведены модели эмпирических данных в виде нечетких подмножеств. Нечеткое подмножество A универсального множества X определяется как множество упорядоченных пар $A = \mu_A(x) \mid x$, где $\mu_A(x)$

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0016

– функция принадлежности, принимающая значения в интервале 0; 1, которая показывает степень принадлежности элемента *x* подмножеству *A*.

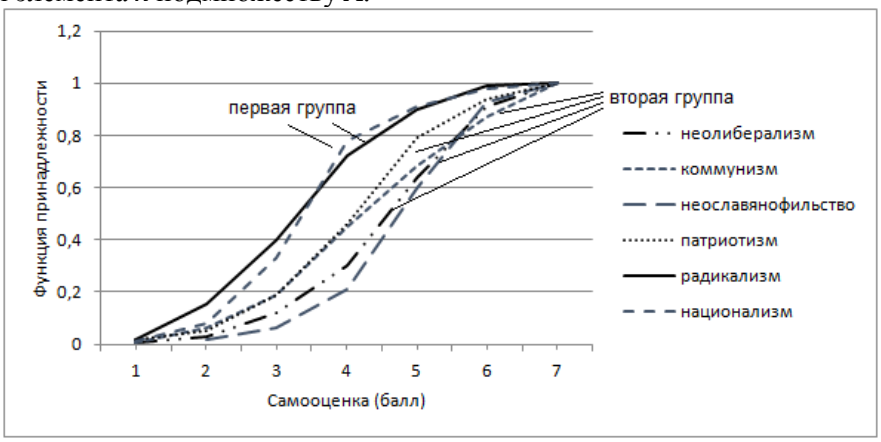


Рисунок 1 – Модели эмпирических данных двух групп испытуемых

Ось абсцисс – ось балльных значений самооценки респондентов идеологических компонентов (x), присутствующих в их сознании. По оси ординат даны значения функций принадлежности $\mu_A(x)$, которые показывают степень выраженности признаков идеологических компонентов в виде соответствующих значений.

Для исследования состояний индивида нами применен когнитивный подход, который направлен на совершенствование моделей и методов поддержки интеллектуального процесса решения различных социальных проблем [3]. Современные исследования показывают, что нестабильные факторы окружающей среды могут способствовать формированию агрессивного поведения [4, 5].

3. Когнитивная модель «состояние индивида» с идеологией экстремизма

Целевой фактор когнитивной модели – «состояние индивида» воздействует через фактор «политическое сознание» на фактор «направленность личности», которая фиксируется в нашем исследовании как экстремистская, провоцирующая в свою очередь «деструктивность», «негативизм» и «антисоциальную мотивацию». Факторы «отказ от диалога» и «воинственность» усиливают негативное влияние и формируют «экстремистскую направленность личности». Указанные факторы входят в состав когнитивной карты «состояние индивида» с идеологией экстремизма и относятся к управляющим воздействиям. Когнитивная карта представляется математической структурой в виде взвешенного ориентированного графа. Вершины орграфа – это перечисленные факторы, а дуги – прямые или обратные связи между ними, снабженные экспертными оценками (рис. 2).

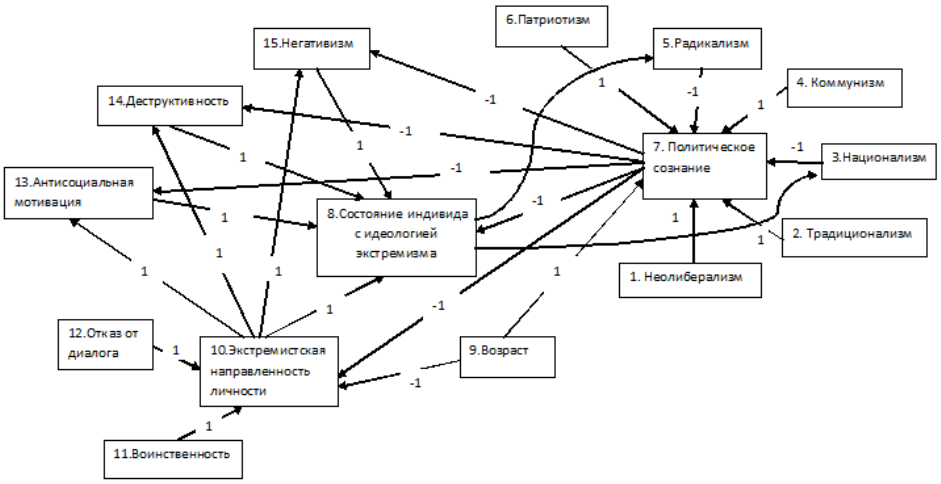


Рисунок 2 – Когнитивная модель «состояние индивида» с идеологией экстремизма

Взаимосвязи или причинно-следственные отношения между факторами формируются в ходе экспертных рассуждений. «Если экстремистская направленность личности увеличивается, то антисоциальная мотивация растет». «Если состояние индивида с идеологией экстремизма лучше, то радикализма больше» и т.д.

4. Результаты и обсуждение. Совокупность симплексов, соединенных посредством общих граней орграфа, образуют симплициальные комплексы $K_X(Y, R)$ и $K_Y(X, R)$,которые в нашем примере исследуются с использованием матрицы инцидентности, содержащей пятнадцать симплексов с разной связностью. Комплекс $K_X(Y, R)$ имеет связный компонент $\{x_8\ x_{13}\}$, иллюстрирующий латентную связь между факторами x_1 – «политическое сознание» и x_{13} – «антисоциальная мотивация». А комплекс $K_Y(X, R)$ – связный компонент $\{x_7, x_{10}\}$, иллюстрирующий неявную связь между факторами x_7 – «политическое сознание» и x_{10} – «экстремистская направленность личности». Факторы «антисоциальная мотивация» и «экстремистская направленность личности» применяются для управления «политическим сознанием» индивида, который может выбираться специалистами для обоснования управленческих решений.

Постоянное наблюдение за состоянием индивида невозможно. Поэтому создается соответствующая имитация его состояния на основе импульсного вычислительного эксперимента для выявления изменения значений факторов когнитивной модели при различных условиях. Вычислительный эксперимент подтвердил гипотезу об ухудшении «политического сознания» индивида при увеличении влияния факторов «радикализм» и «национализм».

Заключение

Формирование идейных установок обусловлено распространением в общественном сознании определенных взглядов и ценностных ориентиров. Наши исследования показали изменения «состояний индивида» под влиянием идеологических компонентов, оказывающих влияние на его «политическое сознание». Результаты исследования могут использоваться в рамках социального управления при разработке профилактических материалов по борьбе с негативным поведением индивидов.

Библиография

1. *Кондратенко Е.Н., Кружилина Т.В.* Особенности функционирования идеологизированной лексики в виртуальном тексте // Теория языка и межкультурная коммуникация. 2019. № 4 (35). С. 123-131.

2. *Фахриев И.Д.* Анализ и профилактика радикализма как способ противодействия экстремизму // Аллея науки. 2020. Т. 1. № 10 (49). С. 274-276.

3. *Маренко В.А., Лучко О.Н.. Мильчарек Т.П.* Модели когнитивного диссонанса личности и экстремизма для поддержки принятия решений. – Новосибирск: СО РАН, 2022. 99 с.

4. *Давыдова Ю.Д., Казанцева А.В., Еникаева Р.Ф.,* и др. Роль полиморфных локусов генов моноаминергических систем в формировании агрессивности у здоровых индивидов // Известия Уфимского научного центра РАН. 2021. № 4. С. 35-40.

5. *Кожегельдиева К.М., Каримова Б.А., Кыдыралиева А.А.* Влияние личностной агрессивности молодежи при организации обучения в вузе // Актуальные вопросы образования и науки. 2021. № 2. (72). С. 111-113.

Bibliography

1. *Kondratenko Ye.N., Kruzhilina T.V.* Osobennosti funktsionirovaniya ideologizirovannoy leksiki v virtual'nom tekste [Theory of Language and Intercultural Communication]. 2019. № 4 (35). S. 123-131.

2. *Fakhriyev I.D.* Analiz i profilaktika radikalizma kak sposob protivodeystviya ekstremizmu [Alley of Science]. 2020. T. 1. № 10 (49). S. 274-276.

3. *Marenko V.A., Luchko O.N.. Mil'charek T.P.* Modeli kognitivnogo dissonansa lichnosti i ekstremizma dlya podderzhki prinyatiya resheniy [Models of Cognitive Dissonance of Personality and Extremism for Decision Support]. – Novosibirsk: SB RAS, 2022. 99 s.

4. *Davydova YU.D., Kazantseva A.V., Yenikayeva R.F.,* i dr. Rol' polimorfnykh lokusov genov monoaminergicheskikh sistem v formirovanii agressivnosti u zdorovykh individov [Proceedings of the Ufa Scientific Center of the Russian Academy of Sciences]. 2021. № 4. S. 35-40.

5. *Kozhegel'diyeva K.M., Karimova B.A., Kydyraliyeva A.A.* Vliyaniye lichnostnoy agressivnosti molodezhi pri organizatsii obucheniya v vuze [Topical Issues of Education and Science]. 2021. № 2. (72). S. 111-113.

Финансирование: Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0016.

DOI 10.53980/9785907599970_129

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В СТЕРЖНЯХ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПЕРВОГО РОДА

Мегралиев Я. Т. *, Искендеров Р. А., Альгаева Ф.Р. *****
**Бакинский Государственный Университет, Азербайджан,*
Баку, yashar_aze@mail.ru
*** Азербайджанский университет архитектуры и строительства, Баку, Азербайджан,*
r.iskanderov@gmail.com
******* *Азербайджанский университет архитектуры и строительства, Баку, Азербайджан,*
farida.algayeva84@gmail.com

Исследована одна обратная краевая задача для линеаризованного уравнения продольных волн в стержнях с интегральным условием первого рода. Для рассматриваемой обратной краевой задачи вводится определение классического решения. С помощью метода Фурье задача сводится к решению системы интегральных уравнений. С помощью метода сжатых отображений доказывается существование и единственность решения системы интегральных уравнений. Далее доказывается существование и единственность классического решения исходной задачи.

Ключевые слова: *Обратная краевая задача, уравнения продольных волн, метод Фурье, классическое решение.*

INVERSE BOUNDARY PROBLEM FOR LINEARIZED EQUATION OF LONGITUDINAL WAVES IN RODS WITH INTEGRAL CONDITION OF THE FIRST KIND

Mehraliyev Y.T.*, Iskanderov R.A, Algayeva F.R. *****
** Baku State University, Azerbaijan, Baku,*
yashar_aze@mail.ru
*** Azerbaijan University of Architecture and Construction, Baku, Azerbaijan,*
r.iskanderov@gmail.com
******* *Azerbaijan University of Architecture and Construction, Baku, Azerbaijan,*
farida.algayeva84@gmail.com

An inverse boundary value problem for linearized equation of longitudinal waves in rods with integral condition of the first kind is investigated. A definition of classical solution is introduced for this problem. The Fourier method is used to reduce the problem to a system of integral equations. The method of contraction mappings is applied to prove the existence and uniqueness of a solution of the system of integral equations. Then, the existence and uniqueness of a classical solution of the initial problem is proved.

Keywords*: Inverse boundary problem, longitudinal wave equations, Fourier method, classic solution.*

Введение

Под обратной задачей для уравнений с частными производными в настоящей работе подразумевается такая задача, в которой вместе с решением требуется определить правую часть или (и) тот или иной коэффициент (коэффициенты) самого уравнения. В случае, если в обратной задаче неизвестными являются решение и правая часть, то такая обратная задача будет линейной; если же неизвестными являются решение и хотя бы один из коэффициентов, то обратная задача будет нелинейной. Именно нелинейные обратные задачи для линеаризованного уравнения продольных волн в стержнях и будут изучаться в настоящей работе.

В настоящее время теория нелокальных задач интенсивно развивается и представляет собой важный раздел теории дифференциальных уравнений с частными производными. Большой интерес в этой области представляют задачи с нелокальными интегральными условиями. Условия такого вида могут появиться при математическом моделировании явлений, связанных с физикой плазмы [1] , распространением тепла [2], процессом влагопереноса в капиллярно-пористых средах [3], вопросами демографии и математической биологии.

Вопросы разрешимости задач с нелокальными интегральными условиями для уравнений с частными производными изучены в работах [4,5].

1. Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

Рассмотрим уравнение [6]

$$u_{tt}(x,t)+u_{ttxx}(x,t)-u_{xx}(x,t)=a(t)u(x,t)+f(x,t) \tag{1}$$

и поставим для него в области $D_T=\{(x,t):0<x<1,0<t\le T\}$ обратную краевую задачу с граничными условиями:

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,T)=\psi(x)\quad (0\le x\le 1), \tag{2}$$

граничным условием Неймана

$$u_x(0,t)=0\quad (0\le t\le T), \tag{3}$$

интегральным условием

$$\int_0^1 u(x,t)dx=0\quad (0\le t\le T) \tag{4}$$

и с дополнительными условиями

$$u(0,t)=h(t)\quad (0\le t\le T), \tag{5}$$

где $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h(t)$ –заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$ –искомые функции.

Определение. *Под классическим решением обратной краевой задачи (1)-(5) будем понимать пару* $\{u(x,t),a(t)\}$ *функций* $u(x,t)$, $a(t)$, *если* $u(x,t)\in\tilde{C}^{2,2}(\overline{D}_T)$, $a(t)\in C[0,T]$ *и выполняются соотношения (1)-(5) в обычном смысле. где*

$$\tilde{C}^{2,2}(D_T)=\left\{u(x,t):u(x,t)\ \in C^2(D_T),u_{ttxx}(x,t)\in C(D_T)\right\}.$$

Для исследования задачи (1)-(5) сначала рассмотрим следующую задачу:

$$y''(t)=a(t)y(t)\quad (0\le t\le T), \tag{6}$$

$$y(0)=0,\ y'(T)=0, \tag{7}$$

где $a(t)\in C[0,T]$–заданная функция, а $y=y(t)$ –искомая функция, причем под решением задачи (6), (7) понимаем функцию $y(t)$, непрерывную на $[0,T]$ вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (6), и удовлетворяющую условиям (6), (7) в обычном смысле.

Справедлива следующая

Лемма 1. [7]. *Пусть функция* $a(t)\in C[0,T]$ *такая, что*

$$\|a(t)\|_{C[0,T]}\le R=const.$$

Кроме того, $\dfrac{1}{2}RT^2<1.$

Тогда задача (6), (7) имеет только тривиальное решение.

Наряду с обратной краевой задачей (1)-(5) рассмотрим следующую вспомогательную обратную краевую задачу. Требуется определить пару $\{u(x,t),a(t)\}$ функций $u(x,t)\in\tilde{C}^{2,2}(\overline{D}_T)$ и $a(t)\in C[0,T]$, из соотношений (1)-(3),

$$u_x(1,t)=0\quad (0\le t\le T), \tag{8}$$

$$h''(t)+u_{ttxx}(0,t)-u_{xx}(0,t)=a(t)h(t)+f(0,t)\ (0\le t\le T)\ . \tag{9}$$

Справедлива следующая

Теорема1. *Пусть* $\varphi(x),\psi(x)\in C^1[0,1]$, $\varphi'(1)=0$, $\psi'(1)=0$, $h(t)\in C^2[0,T]$, $f(x,t)\in C(\overline{D}_T)$, $\int_0^1 f(x,t)dx=0\quad (0\le t\le T)$, $h(t)\ne 0\ (0\le t\le T)$ *и выполняются условия согласования*

$$\int_0^1\varphi(x)dx=0,\ \int_0^1\varphi(x)dx=0, \tag{10}$$

$$\varphi(0)=h(0),\quad \psi(0)=h'(T). \tag{11}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *Каждое классическое решение* $\{u(x,t),a(t)\}$ *задачи (1)-(5) является и решением задачи (1)-(3), (8), (9);*

2.Каждое решение $\{u(x,t),a(t)\}$ *задачи (1)-(3), (8), (9), такое, что*

$$\frac{1}{2}\|a(t)\|_{C[0,T]}T^2<1 \tag{12}$$

является классическим решением (1)-(5).

Доказательство. Пусть $\{u(x,t),a(t)\}$ является решением задачи (1) - (5). Интегрируя уравнение (1) по x от 0 до 1, имеем:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 u(x,t)dx+u_{ttx}(1,t)-u_{ttx}(0,t)-(u_x(1,t)-u_x(0,t))=$$
$$=a(t)\int_0^1 u(x,t)dx+\int_0^1 f(x,t)dx\ (0\le t\le T). \tag{13}$$

Допуская, что, $\int_0^1 f(x,t)dx=0\ \ (0\le t\le T)$, с учётом (3), (4), получаем

$$u_{ttx}(1,t)-u_x(1,t)=0\ \ (0\le t\le T). \tag{14}$$

В силу (2), с учетом $\varphi'(1)=0,\ \psi'(1)=0$, очевидно, что

$$u_x(1,0)=\varphi'(1)=0,\ u_{tx}(1,T)=\psi'(1)=0. \tag{15}$$

Нетрудно видеть, что задача (14), (15), имеет только тривиальное решение, то $u_x(1,t)=0\ \ (0\le t\le T)$, т.е. выполняется условия (8).

Из (1) имеем: $$\frac{d^2}{dt^2}u(0,t)+u_{ttxx}(0,t)-u_{xx}(0,t)=a(t)h(t)+f(0,t)\ \ (0\le t\le T), \tag{16}$$

Из (16), считая $h(t)\in C^2[0,T]$ и дифференцируя два раза (5), приходим к выполнению (9).

Теперь, предположим, что $\{u(x,t),a(t)\}$ является решением задачи (1)-(3), (8), (9), причем выполнено (12). Тогда из (13), с учётом (3) и (8), находим:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 u(x,t)dx-a(t)\int_0^1 u(x,t)dx=0\ \ (0\le t\le T). \tag{17}$$

В силу (2) , с учетом (10), очевидно, что

$$\int_0^1 u(x,0)dx=\int_0^1\varphi(x)dx=0,\qquad \int_0^1 u_t(x,T)dx=\int_0^1\psi(x)dx=0. \tag{18}$$

Так как, в силу леммы 1, задача (16), (18) имеет только тривиальное решение, то $\int_0^1 u(x,t)dx=0\ \ (0\le t\le T)$, т.е. выполняется условие (4).

Далее, из (9) и (16) получаем:

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(0,t)-h(t))=a(t)(u(0,t)-h(t))\ \ (0\le t\le T). \tag{19}$$

В силу (2) и условий согласования (11), находим:

$$u(0,0)-h(0)=\varphi(0)-h(0)=0. \tag{20}$$

Из (19) и (20) , в силу леммы 1, заключаем, что выполняется условие (5). Теорема доказана.

2. Исследование существования и единственности классического решения обратной краевой задачи

Компоненту $u(x,t)$ решения $\{u(x,t),a(t)\}$ задачи (1)-(3), (8),(9) будем искать в виде:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)\cos\lambda_k x\ \ (\lambda_k=\pi k), \tag{21}$$

где $u_k(t) = m_k \int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx \quad (k = 0,1,2,...),$

причём

$$m_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 2, & k = 1,2,.... \end{cases}$$

Тогда применяя формальную схему метода Фурье, из (1), (2), получаем:

$$(1-\lambda_k^2)u_k''(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = F_k(t;u,a) \quad (k = 0,1,2,...;0 \le t \le T), \tag{22}$$

$$u_k(0) = \varphi_k,\ u_k'(T) = \psi_k \quad (k = 0,1,2,...), \tag{23}$$

где $F_k(t;u,a) = f_k(t) + a(t)u_k(t)$, $f_k(t) = m_k \int_0^1 f(x,t)\cos\lambda_k x dx$,

$$\varphi_k = m_k \int_0^1 \varphi(x)\cos\lambda_k x dx, \psi_k = m_k \int_0^1 \psi(x)\cos\lambda_k x dx (k = 0,1,2,...) .$$

Решая задачу (22), (23) находим:

$$u_0(t) = \varphi_0 + \int_0^T m(t)u_0(t)dt + \psi_0 t + \int_0^T G_0(t,\tau)F_0(\tau;u,a)d\tau, \tag{24}$$

$$u_k(t) = \frac{ch(\beta_k(T-t))}{ch(\beta_k T)}\varphi_k +$$

$$+ \frac{sh(\beta_k t)}{\beta_k ch(\beta_k T)}\psi_k - \frac{1}{(\lambda_k^2 - 1)\beta_k}\int_0^T G_k(t,\tau)F_k(\tau;u,a)d\tau \quad (k=1,2,\ldots), \tag{25}$$

где

$$G_0(t,\tau) = \begin{cases} -t, & t \in [0,\tau], \\ -\tau, t \in [\tau,T], \end{cases}$$

$$\beta_k^2 = \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2 - 1} > 0,$$

$$G_k(t,\tau) = \begin{cases} -\dfrac{[sh(\beta_k(T+t-\tau)) - sh(\beta_k(T-(t+\tau)))]}{2ch(\beta_k T)}, & t \in [0,\tau], \\ -\dfrac{sh(\beta_k(T-(t+\tau))) - sh(\beta_k(T-(t-\tau)))}{2ch(\beta_k T)}, & t \in [\tau,T]. \end{cases}$$

После подстановки выражений из (24), (25) в (21), для определения компоненты $u(x,t)$ решения задачи (1)-(3), (8),(9) получаем:

$$u(x,t) = \varphi_0 + \psi_0 t + \int_0^T G_0(t,\tau)F_0(\tau;u,a)d\tau +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{ch(\beta_k(T-t))}{ch(\beta_k T)}\varphi_k + + \frac{sh(\beta_k t)}{\beta_k ch(\beta_k T)}\psi_k - \frac{1}{(\lambda_k^2 - 1)\beta_k}\int_0^T G_k(t,\tau)F_k(\tau;u,a)d\tau\right\}\cos\lambda_k x. \tag{26}$$

Теперь, из (8) с учетом (21), имеем:

$$a(t) = [h(t)]^{-1}\left\{ h''(t) - f(0,t) - \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2(u_k''(t) - u_k(t))\right\} . \tag{27}$$

Далее, из (22), с учётом (25), получаем:

$$-\lambda_k^2 u_k''(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = F_k(t;u,a) - u_k''(t) = \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2 - 1}F_k(t;u,a) - \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2 - 1}u_k(t) =$$

$$= \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2 - 1} F_k(t;u,a) - \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2 - 1}\left[\frac{ch(\beta_k (T-t))}{ch(\beta_k T)} \varphi_k + \right.$$

$$\left. + \frac{sh(\beta_k t)}{\beta_k ch(\beta_k T)} \psi_k - - \frac{1}{(\lambda_k^2 - 1)\beta_k} \int_0^T G_k(t,\tau) F_k(\tau;u,a) d\tau \right] \ (k = 1,2,...) \ . \qquad (28)$$

Для того, чтобы получить уравнение для второй компоненты $a(t)$ решения $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1)-(3), (8),(9) подставим выражение (28) в (27) и:

$$a(t) = [h(t)]^{-1} \left\{ h''(t) - f(0,t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2 - 1} F_k(t;u,a) + \right. \right.$$

$$- \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2 - 1}\left[\frac{ch(\beta_k (T-t))}{ch(\beta_k T)} \varphi_k + \frac{sh(\beta_k t)}{\beta_k ch(\beta_k T)} \psi_k - \right.$$

$$\left. \left. \left. - - \frac{1}{(\lambda_k^2 - 1)\beta_k} \int_0^T G_k(t,\tau) F_k(\tau;u,a) d\tau \right] \right] \right\} \ (0 \le t \le T). \qquad (29)$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3), (8),(9) свелось к решению системы (26) ,(29) относительно неизвестных функций $u(x,t)$ и $a(t)$.

Исходя из определения решения задачи (1)-(3), (8),(9) доказывается следующая

Лемма 2. *Если* $\{u(x,t), a(t)\}$ *– любое решение задачи (1)-(3), (8),(9), то функции*

$$u_k(t) = m_k \int_0^1 u(x,t) \cos \lambda_k x dx \ \ (k = 0,1,2,...)$$

удовлетворяют системе (24), (25) в $[0,T]$.

Доказательство. Пусть $\{u(x,t), a(t)\}$ –любое решение задачи (1)-(3), (8),(9). Тогда умножив обе части уравнения (1) на функцию $m_k \cos \lambda_k x \ \ (k = 0,1,2,...)$, интегрируя полученное равенство по x от 0 до 1 и пользуясь соотношениями

$$m_k \int_0^1 u_{tt}(x,t) \cos \lambda_k x dx = \frac{d^2}{dt^2}\left(m_k \int_0^1 u(x,t) \cos \lambda_k x dx \right) = u_k''(t) \quad (k = 0,1,2,...),$$

$$m_k \int_0^1 u_{xx}(x,t) \cos \lambda_k x dx = -\lambda_k^2 \left(m_k \int_0^1 u(x,t) \cos \lambda_k x dx \right) = -\lambda_k^2 u_k(t) \ \ (k = 0,1,.2,..),$$

$$m_k \int_0^1 u_{ttxx}(x,t) \cos \lambda_k x dx = -\lambda_k^2 m_k \int_0^1 u_{tt}(x,t) c0s \lambda_k x dx =$$

$$= -\lambda_k^2 \frac{d^2}{dt^2}\left(m_k \int_0^1 u(x,t) \cos \lambda_k x dx \right) = -\lambda_k^2 u_k''(t) \ (k = 0,1,.2,..),$$

получаем, что удовлетворяется уравнение (22).

Аналогично, из (2) получаем, что выполняется условие (23).

Таким образом, $u_k(t) \ \ (k = 0,1,2,...)$ являются решением задачи (22), (23). И отсюда, непосредственно следует, что функции $u_k(t) \ \ (k = 0,1,2,...)$ удовлетворяют на $[0,T]$ системе (24),(25). Лемма доказана.

Очевидно, что если $u_k(t) = 2\int_0^1 u(x,t) \cos \lambda_k x dx \ \ (k = 0,1,2,...)$ являются решением системы (24),(25), пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x$, $a(t)$ и $a(t)$ является решением системы (26) ,(29).

Из леммы 3.1 следует, что имеет место следующее

Следствие 1. *Пусть система (26) ,(29) имеет единственное решение. Тогда задача (1)-(3),*

(8),(9) не может иметь более одного решения, т.е. если задача (1)-(3), (8),(9) имеет решение, то оно единственно.

С целью исследования задачи (1)-(3), (8), (9) рассмотрим следующие пространства:

1. Обозначим через $B_{2,T}^{\alpha}$ [8], совокупность всех

функций вида

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)\cos\lambda_k x\ \ (\lambda_k=k\pi),$$

рассматриваемых в D_T, где каждая из функций $u_k(t)$ $(k=0,1,...)$ непрерывна на $[0,T]$ и

$$J(u)=\|u_0(t)\|_{C[0,T]}+\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^{\alpha}\|u_k(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}<+\infty.$$

причем $\alpha\geq 0$. Норму в этом множестве определим так:

$$\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{\alpha}}=J(u).$$

Через E_T^{α} обозначим пространство $B_{2,T}^{\alpha}\times C[0,T]$ вектор-функций $z(x,t)=\{u(x,t),a(t)\}$ с нормой

$$\|z(x,t)\|_{E_T^{\alpha}}=\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{\alpha}}+\|a(t)\|_{C[0,T]}.$$

Известно, что $B_{2,T}^{\alpha}$ и E_T^{α} являются банаховыми пространствами.

Теперь рассмотрим в пространстве E_T^3 оператор

$$\Phi(u,a,b)=\{\Phi_1(u,a),\Phi_2(u,a)\},$$

где

$$\Phi_1(u,a)=\tilde{u}(x,t)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{u}_k(t)\cos\lambda_k x,\quad \Phi_2(u,a,b)=\tilde{a}(t),$$

а $\tilde{u}_0(t),\tilde{u}_k(t)$ $(k=1,2,...)$ и $\tilde{a}(t)$ равны соответственно правым частям (24), (25) и (29).

Нетрудно видеть, что

$$\frac{ch(\beta_k(T-t))}{ch(\beta_k T)}<1,\quad \frac{sh(\beta_k t)}{ch(\beta_k T)}<1,\quad \frac{sh(\beta_k(T+t-\tau))}{ch(\beta_k T)}<1\ (t\in[0,\tau]),$$

$$\frac{sh(\beta_k(T-(t+\tau)))}{ch(\beta_k T)}<1,\qquad \frac{sh(\beta_k(T-(t-\tau)))}{ch(\beta_k T)}<1\quad (t\in[\tau,T]),$$

$$\lambda_k^2-1>\frac{1}{2}\lambda_k^2,\ 1<\beta_k=\frac{\lambda_k}{\sqrt{\lambda_k^2-1}}<\sqrt{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{1}{\beta_k}<1.$$

Учитывая эти соотношения имеем:

$$\|\tilde{u}_0(t)\|_{C[0,T]}\leq|\varphi_0|+T|\psi_0|+2T\sqrt{T}\left(\int_0^t|f_0(\tau)|^2\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+2T^2\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u_0(t)\|_{C[0,T]},\tag{30}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\varphi_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+2\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\psi_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+4\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k|f_k(\tau)|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+4T\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}},\tag{31}$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]}\leq\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left\{\|h''(t)-f(0,t)\|_{C[0,T]}+\right.$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\|f_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}+\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\varphi_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\psi_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+2\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k|f_k(\tau)|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\left.+2T\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\Bigg\}. \tag{32}$$

Предположим, что данные задачи (1)-(3), (8), (9), удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x)\in C^2[0,1]$, $\varphi'''(x)\in L_2(0,1)$, $\varphi'(0)=\varphi'(1)=0.$

2. $\psi(x)\in C^2[0,1]$, $\psi'''(x)\in L_2(0,1)$, $\psi'(0)=\psi'(1)=0.$

3. $f(x,t)\in C(D_T)$, $f_x(x,t)\in L_2(D_T)$, $f_x(0,t)=f_x(1,t)=0$ $(0\le t\le T)$.

4. $h(t)\in C^2[0,T]$, $h(t)\neq 0\,(0\le t\le T)$..

Тогда, из (30)-(32), соответственно, получаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^3}\le A_1(T)+B_1(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \tag{33}$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]}\le A_2(T)+B_2(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3},$$

$$+B_2(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}+C_2(T)\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3+D_2(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}}, \tag{34}$$

где

$$A_1(T)=\|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)}+T\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)}+2T\sqrt{T}\|f(x,t)\|_{L_2(D_T)}+$$

$$+2\|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)}+2\|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)}+4\sqrt{T}\|f_x(x,t)\|_{L_2(D_T)},\ B_1(T)=6T,\ ,$$

$$A_2(T)=\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\Bigg\{\|h''(t)-f(0,t)\|_{C[0,T]}+$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left\|\|f_x(x,t)\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0.1)}+\|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)}+\|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)}+\right.$$

$$\left.+2\sqrt{T}\|f_x(x,t)\|_{L_2(D_T)}\right]\Bigg\},$$

$$B_2(T)=2\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}(2T+1),$$

Из неравенств (33),(34) заключаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^3}+\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]}\le A(T)+B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \tag{35}$$

где

$$A(T)=A_1(T)+A_2(T),B(T)=B_1(T)+B_2(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1-4 и*

$$B(T)(A(T)+2)^2<1. \tag{36}$$

Тогда задача (1)-(3), (8), (9) имеет в шаре $K = K_R(\|z\|_{E_T^3} \le R = A(T) + 2)$ *пространства* E_T^3 *единственное решение.*

Доказательство. В пространстве E_T^3 рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \tag{37}$$

где $z = \{u, a\}$, компоненты $\Phi_i(u,a)$ $(i = 1,2)$, оператора $\Phi(u,a)$, определены правыми частями уравнений (26) и (29).

Рассмотрим оператор $\Phi(u,a)$ в шаре $K = K_R$ из E_T^3. Аналогично (35) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E_T^3} \le A(T) + B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \tag{38}$$

$$\|\Phi z_1 - \Phi z_s\|_{E_T^3} \le 2B(T)TR\left(\|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^3}\right). \tag{39}$$

Тогда из оценок (38) и (39), с учетом (36), следует, что оператор Φ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K = K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u, a\}$, которая является решением уравнения (37) т.е. $\{u, a\}$, является в шаре $K = K_R$ единственным решением системы (26) и (29).

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B_{2,T}^3$, непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x,t)$ и $u_{xx}(x,t)$ в $\overline{D}_T$.

Теперь из (22), имеем:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_k''(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{2}\left\{\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \left\| \|a(t)u_x(x,t) + f_x(x,t)\|_{C[0,T]} \right\|_{L_2(0,1)} \right\}.$$

Отсюда следует, что $u_{tt}(x,t)$, $u_{ttx}(x,t)$, $u_{ttxx}(x,t)$, непрерывны в $\overline{D}_T$.

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2), (3), (7), (9) удовлетворяются в обычном смысле. Следовательно, $\{u(x,t), a(t)\}$ является решением задачи (1)-(3), (7)-(9), причем в силу следствия леммы 2 оно единственно в шаре $K = K_R$. Теорема доказана.

С помощью теоремы 1, из последней теоремы немедленно вытекает однозначная разрешимость исходной задачи (1)-(5).

Теорема 3.3. *Пусть выполняются все условия теоремы 2,*

$\int_0^1 f(x,t)dx = 0$ $(0 \le t \le T)$, $\int_0^1 g(x,t)dx = 0$ $(0 \le t \le T)$ *, выполняются условия согласования (10)-(11) и*

$$\frac{1}{2}(A(T) + 2)T^2 < 1.$$

Тогда задача (1) - (5) имеет в шаре $K = K_R(\|z\|_{E_T^3} \le A(T) + 2)$ *пространства* E_T^3 *единственное классическое решение.*

Библиография

1. . Самарский, А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1980. – Т. 16, № 11. – С. 1925–1935.

2. Ионкин, Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13, № 2. – С. 294– 304.

3. Нахушев, А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приближения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18, № 1. – С. 72–81.

4.Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33. № 1. С. 115–119.

5. Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 1166–1179.

6. Ерофеев В.И., Кажаев В.В. Семериков Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность.М.:ФИЗМАТЛИТ,2002.-208с.

7. Я. Т. Мегралиев, “Обратная краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка с дополнительным интегральным условием”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2012, № 1, 32–40.

8. Ya.T. Mehraliev On an inverse boundary value problem for a second order elliptic equation with integral condition, Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2012. Issue 77. P. 145–156

Bibliography

1. Samarskii A.A. On some problems of the theory of differential equations, Differ. Uravn., 1980, vol. 16, no. 11, pp. 1925–1935.

2. Ionkin N.I. Solutions of boundary value problem in heat conductions theory with nonlocal boundary conditions, Differ. Uravn., 1977, vol. 13, no. 2, pp. 294–304.

3. Nakhushev A.M. A method of approximation of solving the boundary value problems for the differential equations and its approximation to dynamics of soil moisture and ground water, Differ. Uravn., 1982, vol. 18, no. 1, pp. 72–81.

4. Kapustin N.Yu., Moiseev E.I. On the spectral problems with the spectral parameter under the boundary condition, Differ. Uravn., 1997, vol. 33, no. 1, pp. 115–119.

5. Kozhanov A.I., Pul’kina L.S. On the solvability of boundary-value problems with the non-local boundary condition of integral form for the multidimensional hyperbolic equations, Differ. Uravn., 2006, vol. 42, no. 9, pp. 1166–1179.

6. Erofeev VI, Kazhaev VV, Semerikova NP. Waves in rods, dispersion, dissipation, nonlinearity. 2002; M., FIZMATLIT, –208.-ISBN 5–9221–0294–X.

7. Ya. T. Megraliev, “Inverse boundary value problem for second order elliptic equation with additional integral condition”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2012, no. 1, 32–40

8/Ya.T. Mehraliev On an inverse boundary value problem for a second order elliptic equation with integral condition, Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2012. Issue 77. P. 145–156

УДК 519.64

DOI 10.53980/9785907599970_138

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЧЕТЫРЁХВОЛНОВОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ОПТИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ*

Медведев С.Б.*, Семисалов Б.В.*, **

**Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий Россия, Новосибирск*

***Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия, Новосибирск*

medvedev@ict.nsc.ru, vibis@ngs.ru

Моделирование турбулентных процессов в оптоволоконных системах основано на нелинейном уравнении Шрёдингера. Случайное взаимодействие волн в таких системах при наличии накачки и диссипации энергии описывается четырёхволновым кинетическим уравнением (КУ) с интегралом столкновений. Сложность решения КУ связана с наличием больших градиентов решения, а также существенных особенностей ядра интеграла столкновений. В работе обсуждаются новые кубатурные формулы, дробно-рациональные приближения и адаптивные алгоритмы, позволяющие найти решение КУ.

Ключевые слова: *оптическая турбулентность, кинетическое уравнение, квадратурные формулы, замена переменной, дробно-рациональные интерполяции, метод установления, метод коллокации.*

ALGORITHM FOR SOLVING FOUR-WAVE KINETIC EQUATION IN OPTICAL TURBULENCE

Medvedev S.B.*, Semisalov B.V*, **

**Federal research center for information and computational technologies, Russia, Novosibirsk*

***Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Russia, Novosibirsk*

medvedev@ict.nsc.ru, vibis@ngs.ru

Modelling of turbulent processes in fibre optical systems is based on nonlinear Schrödinger equation. Random interaction of waves in such systems in the presence of energy pumping and dissipation is described by a four-wave kinetic equation (KE) with a collision term. The complexity of solving KE is related to steep gradients of the solution and to strong singularities of the kernel of collision term. We report on the new cubature formulas, rational approximations, and adaptive algorithms that enable one to find the solution.

Key words*: optical turbulence, kinetic equation, quadrature formulas, variable transformation, rational interpolations, relaxation method, collocation method.*

Введение и постановка задачи

При эксплуатации случайных волоконных лазерных систем стандартной является ситуация, когда накачка и диссипация энергии работают циклически. При этом система выходит на стационарный режим, спектральные характеристики которого представляют интерес как для научных исследований, так и для развития энергосберегающих технологий. В [1] было получено кинетическое уравнение (КУ), описывающее нелинейные волновые взаимодействия в таких системах.

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2gF + \frac{\gamma^2}{\pi^2}\left\{ \int\limits_{\Delta_\omega} \frac{g_c F_1 F_2 F_3}{g_c^2+\Omega^2}\, d\omega_2 d\omega_3 + F \int\limits_{\Delta_\omega} \left(\frac{g_a F_2 F_3}{g_a^2+\Omega^2} - \frac{2 g_b F_1 F_3}{g_b^2+\Omega^2} \right) d\omega_2 d\omega_3 \right\} = 2gF + St(F), \qquad (1)$$

где $F = F(\omega, z)$ – спектр волнового действия генерируемого сигнала, ω – частота, $0 \le \omega \le \omega_{\max}$, $z > 0$ – координата вдоль волокна, $F_1 = F(\omega_2 + \omega_3 - \omega, z)$, $F_i = F(\omega_i, z)$, $i = 2,3$, $\Omega = 2\beta(\omega - \omega_2)(\omega - \omega_3)$, β – коэффициент дисперсии, γ – описывает нелинейность Керра, $g = g(\omega, z) = \sigma - g_s \omega^2 / (2\Omega_g^2)$,

$\Delta_\omega = \{(\omega_2, \omega_3) : \omega_2, \omega_3 \ge 0,\ \omega_2 + \omega_3 \ge 0\}$ – область интегрирования (серая область на рис. 1,а),

$$g_a = 2\sigma + W_{23}^{\omega} g_s / \Omega_g^2,\ g_b = 2\sigma - \left[W_{23}^{\omega} + \omega^2 + \omega_3^2 \right] g_s / \Omega_g^2,\ g_c = 2\sigma - \left[W_{23}^{\omega} + \omega_2^2 + \omega_3^2 \right] g_s / \Omega_g^2,$$

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (СОГЛАШЕНИЕ № 22-11-00287).

$W_{23}^{\omega} = \omega_2\omega_3 - \omega_2\omega - \omega_3\omega$, σ – накачка энергии, действующая на всех частотах, g_s, Ω_g описывают высокочастотную диссипацию, причём, следуя модели насыщаемого поглотителя из [2], имеем

$$g_s = g_s(z) = g_A / \{1 + E(z)/E_{sat}\},\ E(z) = \int_0^{\omega_{\max}} F(\omega, z)d\omega,$$

g_A, E_{sat} задают модуляцию и мощность поглотителя, $E(z)$ – энергия.

Заметим, что при малых g_a, g_b, g_c подынтегральная функция имеет особенность вдоль линий $\omega_2 = \omega$ и $\omega_3 = \omega$ (пунктирные линии на рис. 1,а), которая в пределе $g_a, g_b, g_c \to 0$ переходит в разрыв второго рода. В таком случае, интеграл следует понимать в качестве его главного значения по Коши.

Для (1) поставим задачу Коши с начальным данным по *z* в виде суммы белого шума и солитона:

$$F(\omega, 0) = (8/\pi)\times 10^{-7} + \{0.1\pi\,\mathrm{sech}(128\omega)\}^2. \qquad (2)$$

Таким образом, нами исследовано взаимодействие шума и солитона. В расчётах будем полагать, что решение *F* для всех рассмотренных *t* является аналитической функцией ω, но при этом оно имеет особенность – пик в окрестности нуля, задаваемый функцией $(\mathrm{sech}(128\,\omega))^2$.

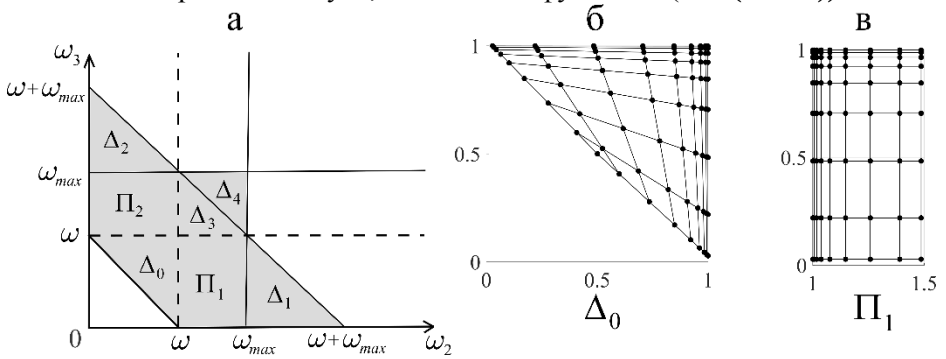


Рисунок 1 – Область интегрирования Δ_ω (выделена серым) и её декомпозиция (а); подобласти Δ_0 и Π_1 при $\omega = 1$, $\omega_{\max} = 1.5$ и сетки кубатурных формул в них при *N*=9 (б, в)

1. Кубатурная формула для интегралов в правой части (1)

Сделаем декомпозицию области Δ_ω (см. рис. 1, а). Разработку кубатурной формулы проведём на примере треугольной области Δ_0 и первого интеграла в правой части (1). Фиксируем *z* и обозначим $f(\omega_2, \omega_3) = \dfrac{g_c F_1 F_2 F_3}{g_c^2 + \Omega^2}$. Делая замену $\omega_2 = -\dfrac{\omega}{8}\left[3x - y(x+1) - 1\right] + \dfrac{\omega}{2}$, $\omega_3 = -\dfrac{\omega}{8}\left[3y - x(y+1) - 1\right] + \dfrac{\omega}{2}$ с якобианом $J = 2 - x - y$ (см. [3]), приходим к интегралу по квадратной области:

$$I = \int_{\Delta_0} f(\omega_2, \omega_3)d\omega_2 d\omega_3 = \frac{\omega^2}{16} \iint\limits_{-1\le x, y\le 1} \tilde{f}(x, y)(2 - x - y)dxdy,\ \tilde{f}(x, y) = f(\omega_2(x, y), \omega_3(x, y)). \qquad (3)$$

Функция f здесь является аналитичной, но имеет особенности вблизи $\omega_2 = \omega$ $(x = -1)$, $\omega_3 = \omega$ $(y = -1)$. Для расчёта интеграла по *x* в (3) фиксируем $y = y^* \in [-1,1]$ и применим квадратурную формулу Гаусса I_N^G на *N* узлах. Пусть $\varsigma^* = (\delta(y^*), \varepsilon(y^*))$ – координаты особой точки $\tilde{f}(x, y^*)$ в комплексной плоскости, их можно определить, разрешив относительно ω_2 равенство $g_c = i\Omega$ при заданном $\omega_3 = \omega_3^*$, где $i = \sqrt{-1}$. Для I_N^G выполнена оценка: $|I - I_N^G| \sim \rho^{-2N}$, где $\rho = \rho(y^*) > 1$ – сумма полуосей эллипса Бернштейна функции $\tilde{f}(x, y^*)$ (см [4], гл. 19). При ς^*, близких к отрезку [–1,1], имеем $\rho \sim 1$. Для увеличения ρ воспользуемся идеей из [5] и сделаем замену *x* на $\chi \in [-1,1]$:

$$x = g(\chi, \delta, \varepsilon) = \left(a^+ - a^- + 2\sinh^{-1}\frac{\chi - \delta(y^*)}{\varepsilon(y^*)} \right) / (a^+ + a^-),\quad a^{\pm} = \sinh^{-1}\frac{1 \pm \delta(y^*)}{\varepsilon(y^*)}. \qquad (4)$$

Отображение (4) «уносит» ς^* на большое расстояние от отрезка [–1,1], тем самым величина ρ и скорость сходимости I_N^G увеличиваются. Аналогичный подход использован для расчёта интеграла по

y в (3) и для вычисления интегралов по подобластям $\Delta_1 - \Delta_4$, Π_1, Π_2. Применение (4) приводит к сгущению узлов вблизи особенностей (см. рис. 1 б, в).

2. Алгоритм решения задачи Коши (1), (2)

Для приближения $F = F(\omega, z)$ в области $(\omega, z) \in [0, \omega_{\max}] \times [0, Z]$ используем прямое (тензорное) произведение барицентрической дробно-рациональной интерполяции [6] и модифицированного интерполяционного полинома с узлами Чебышёва ($\theta_k(z)$ позволяет учесть начальное условие):

$$F(\omega, z) \approx \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{K} \frac{\theta_k(z)}{K} \frac{\xi_m \xi_k T_K(\Lambda(z))\, F(\tilde{\omega}_m, z_k)}{(L(\omega) - \tilde{w}_m)(\Lambda(z) - \varsigma_k)} \Bigg/ \sum_{m=1}^{M} \frac{\xi_m}{L(\omega) - \tilde{w}_m} + F(\omega, 0),\ \theta_k(z) = \frac{1 + \Lambda(z)}{1 + \varsigma_k}, \qquad (5)$$

где L, Λ – линейные отображения отрезков $[0, \omega_{\max}]$, $[0, Z]$ на отрезок $[-1,1]$ соответственно; $T_K(z)$ – многочлен Чебышёва степени K; $\tilde{\omega}_m = L^{-1}(\tilde{w}_m)$, $z_k = \Lambda^{-1}(\varsigma_k)$ – узлы интерполяции, $m = 1,\ldots,M$, $k = 1,\ldots,K$; $\tilde{w}_m = g^{-1}(w_m, -1, \tilde{\varepsilon})$, w_m, ς_k – нули T_M и T_K; $\xi_m = M / T_M'(w_m) = (-1)^m \sin\big((2m-1)\pi/(2M)\big)$, ξ_k задаётся аналогично. Применение дробно-рациональной интерполяции с заменой g^{-1}, обратной к (4), с малым $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$ связано с особенностью решения в окрестности нуля (см. также [5]).

Для решения (1), (2) применим метод установления. Введём фиктивную временну́ю переменную t и будем искать решение (1), как предел решений $\partial F / \partial t = \partial F / \partial z - 2gF - St(F)$ при $t \to \infty$. Введём сетку по t с шагом τ и узлами $t_n = n\tau$, $n = 0,1,\ldots$ Пусть $F^n = F(t_n, \omega, z)$. Используем разностное приближение $\partial F / \partial t \approx \left(F^{n+1} - F^n\right)/\tau$ и будем переходить с шага n на шаг $n+1$, пока не выполнится условие $\left\|F^{n+1} - F^n\right\|_\infty \le 10^{-10}\tau$. Пусть Φ^n и Φ_z^n – матрицы значений $F(t_n, \tilde{\omega}_m, z_k)$ и $(\partial F / \partial z)(t_n, \tilde{\omega}_m, z_k)$ размеров $M \times K$. Следуя [7], найдём значения производных (5) при $z \to z_k$ и получим матричную аппроксимацию оператора $(\partial / \partial z)$: $\Phi_z^n \approx \Phi^n B$, B – $K \times K$ матрица коэффициентов производных (5).

Для перехода с шага n на шаг $n+1$ применим метод коллокаций и получим матричное уравнение

$$(1 + 2\tau\sigma) E\Phi^{n+1} - \tau\left(\Phi^{n+1} B + D_\omega \Phi^{n+1} D_g^n\right) = \Phi^n - \tau St(\Phi^n), \qquad (6)$$

где E – единичная $M \times M$ матрица, $D_\omega = diag(\tilde{\omega}_1^2, \ldots, \tilde{\omega}_M^2)$, $D_g^n = diag(g^n(z_1), \ldots, g^n(z_K))$, $St(\Phi^n)$ – $M \times K$ матрица значений $St(F^n)$. Для решения (6) используем идею алгоритма из [7]. Отметим что, как следует из численных экспериментов, спектральное разложение B, используемое в алгоритме, удаётся найти при относительно небольших K ($K < 20$).

На рис. 2 изображены решения задачи (1), (2) при $\sigma = \gamma = 1$, $\beta = -1$, $g_A = 3$, $\Omega_g^2 = 1000$, $E_{sat} = 1$, $\omega_{\max} = 8\pi$, $M = 256$, $K = 5$, при этом отрезок $[0,20]$ по z разбивался на отрезки $[0, 0.02]$, $[0.02, 0.04]$,…

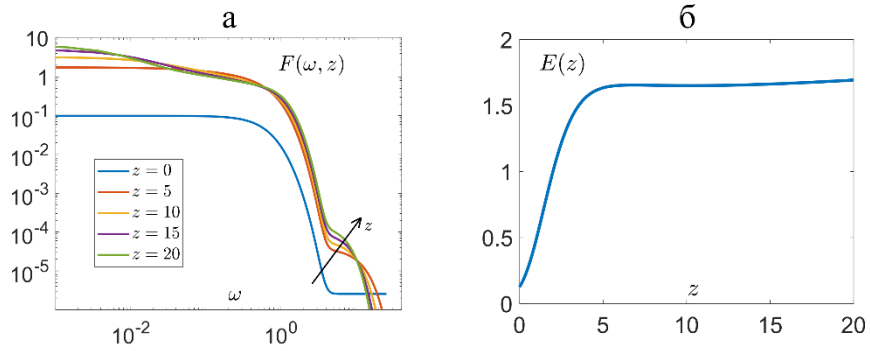


Рисунок 2 – Решения задачи (1), (2) при $z \in [0, 20]$:
а – в логарифмической шкале; б – график энергии $E(z)$

Библиография

1. *Churkin D.V. et al.* Wave kinetics of random fibre lasers // Nat. Commun. 2015. – Vol. 6. Art. № 6214.

2. *Shtyrina O.V. et al.* Theoretical analysis of solutions of cubic-quintic Ginzburg–Landau equation with gain saturation // Opt. express. 2019. – Vol. 27, No. 5. Art. № 347286.

3. *Hossain M.A., Islam M.S.* Generalized composite numerical integration rule over a polygon using gaussian quadrature // Dhaka Univ. J. Sci. 2014. – Vol. 62, No. 1. P. 25–29.

4. *Trefethen L.N.* Approximation theory and approximation practice. Philadelphia: SIAM, 2019.

5. *Tee T.W., Trefethen L.N.* A rational spectral collocation method with adaptively transformed Chebyshev grid points // SIAM J. Sci. Comput. 2006. – Vol. 28, No. 5. P. 1798–1811.

6. *Baltensperger R., Berrut J.-P., Noël B.* Exponential convergence of a linear rational interpolant between transformed Chebyshev points // Math. Comp. 1999. – Vol. 68. P. 1109–1120.

7. *Семисалов Б.В.* Об одном подходе к численному решению задач Дирихле произвольной размерности // СибЖВМ. 2022. – Т. 25, №1. С.77–95.

Bibliography

1. *Churkin D.V. et al.* Wave kinetics of random fibre lasers // Nat. Commun. 2015. – Vol. 6. Art. № 6214.

2. *Shtyrina O.V. et al.* Theoretical analysis of solutions of cubic-quintic Ginzburg–Landau equation with gain saturation // Opt. express. 2019. – Vol. 27, No. 5. Art. № 347286.

3. *Hossain M.A., Islam M.S.* Generalized composite numerical integration rule over a polygon using gaussian quadrature // Dhaka Univ. J. Sci. 2014. – Vol. 62, No. 1. P. 25–29.

4. *Trefethen L.N.* Approximation theory and approximation practice. Philadelphia: SIAM, 2019.

5. *Tee T.W., Trefethen L.N.* A rational spectral collocation method with adaptively transformed Chebyshev grid points // SIAM J. Sci. Comput. 2006. – Vol. 28, No. 5. P. 1798–1811.

6. *Baltensperger R., Berrut J.-P., Noël B.* Exponential convergence of a linear rational interpolant between transformed Chebyshev points // Math. Comp. 1999. – Vol. 68. P. 1109–1120.

7. *Semisalov B.V.* On an Approach to the Numerical Solution of Dirichlet Problems of Arbitrary Dimensions // Numer. Anal. and Appl. 2022. – Vol. 15. P. 63–78.

УДК 519.7

DOI 10.53980/9785907599970_142

МЕТОД ФРАГМЕНТАЦИИ И ДЕФРАГМЕНТАЦИИ ФОРМАЛЬНЫХ КОНТЕКСТОВ[1*]

Монгуш А.Б.
Тувинский государственный университет, Россия, Кызыл,
artyshok52@mail.ru

В данной работе предлагается метод фрагментации и дефрагментации формального контекста, который позволяет сохранить искомое множество формальных понятий. Суть метода заключается в том, что исходный формальный контекст итерационно разлагается на фрагменты, где каждый фрагмент – некоторая часть контекста. В результате образуется конечное множество фрагментов разного размера. Тогда задача состоит в нахождении формальных понятий в фрагментах, объединении полученных результатов и построении решётки формальных понятий.

Ключевые слова: *анализ формальных понятий, формальный контекст, фрагментация и дефрагментация контекста.*

FRAGMENTATION AND DEFRAGMENTATION METHOD OF FORMAL CONTEXTS

Mongush A.B.
Tuvan State University, Russia, Kyzyl
artyshok52@mail.ru

In this paper, we propose fragmentation and defragmentation method of the formal context without losing the searched formal concepts. The essence of the method is that the original formal context is iteratively decomposed into fragments, where each fragment is some part of the context. As a result, a finite set of fragments of different sizes is formed. Then the task consists in finding formal concepts in fragments, combining the results obtained and constructing a lattice of formal concepts.

Key words*: formal concept analysis, formal context, fragmentation and defragmentation context*

Введение

В анализе формальных понятий процесс выявления всех формальных понятий формального контекста трудоемок. Так как число формальных понятий зависит от размера исходного контекста. Поэтому задача поиска множества всех формальных понятий является комбинаторной перечислительной задачей. В настоящее время актуальны исследования по снижению трудоемкости процесса извлечения формальных понятий. В данной работе предлагается метод фрагментации и дефрагментации формального контекста, который позволяет сохранить искомое множество формальных понятий. Суть метода заключается в том, что исходный формальный контекст итерационно разлагается на фрагменты, где каждый фрагмент – некоторая часть контекста. В результате образуется конечное множество фрагментов разного размера. Тогда задача состоит в нахождении формальных понятий в фрагментах, объединении полученных результатов и построении решётки формальных понятий.

1. Постановка задачи

Формальный контекст – тройка $K = (Q, P, I)$, где Q, P непустые конечные множества объектов и свойств этих объектов, I непустое отношение инцидентности между Q и P [1].

Анализ формальных понятий основан на соответствиях Галуа. Пусть $X \subseteq Q$ и $Y \subseteq P$, отображения Галуа «′», представленные в виде пары операторов

[1*]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для молодых ученых – кандидатов наук МК-2437.2022.1.1 «Разработка математического метода и средств для исследования текстов на тувинском языке».

$$X' = \cap_{q \in X} q' = \{p \in P \mid \forall q \in X (q, p) \in I\},$$
$$Y' = \cap_{p \in Y} p' = \{q \in Q \mid \forall p \in Y (q, p) \in I\},$$

определяют соответствие между частично упорядоченными множествами 2^Q и 2^P. Оператор замыкания «$''$» – отображение Галуа «$'$», которое два раза применяется на X и Y.

Пара множеств (X,Y), где $X \subseteq Q$ и $Y \subseteq P$, называется формальным понятием, если выполняются $X' = Y$ и $Y' = X$.

Множество X – объем формального понятия, а Y – содержание. Формальное понятие (X,Y) – совокупность схожих объектов с характерным набором свойств. Множество всех формальных понятий формального контекста обычно обозначается FC. Элементы множества формальных понятий контекста связывается в иерархическую структуру.

На FC введем отношение частичного порядка $\leq$:

$$(X_1, Y_1) \leq (X_2, Y_2), \text{ если } X_1 \subseteq X_2 \text{ (или } Y_2 \subseteq Y_1),$$

где X_1, $X_2 \subseteq Q$ и Y_1, $Y_2 \subseteq P$. Тогда упорядоченное множество всех формальных понятий $(FC, \leq)$ образует решётку [1].

Задача выявления множества FC формулируется следующим образом. Задан формальный контекст K. Найти для контекста K множество FC [1]. Сложность задачи состоит в том, что число формальных понятий экспоненциально зависит от размера заданного контекста K [2]. В работе для снижения трудоемкости процесса выявления множества FC предлагается метод фрагментации и дефрагментации формального контекста.

2. Метод фрагментации и дефрагментации формальных контекстов

Метод фрагментации и дефрагментации формального контекста направлен на разложение задачи поиска множества FC на подзадачи, где каждая подзадача является копией исходной задачи только с уменьшенным размером. Для этого исходный формальный контекст K разлагается на некоторые части. Полученные части можно рассматривать в качестве контекста. Поэтому в формированных частях ищутся формальные понятия, затем объединяются при построении решётки формальных понятий. Процесс фрагментации можно проводить итерационно при следующих условиях:

- первое правило – определить понятие части контекста, как её выявлять, сохраняя искомые формальные понятия;
- второе правило – как остановить итерационный процесс разложения контекста;
- третье правило – как объединить полученные формальные понятия в частях контекста и получить искомое множество FC.

Рассмотрим **первое правило**: правило определения понятия части контекста и выявления части. При этом необходимо учитывать, что при разложении формального контекста не терялись искомые формальные понятия и не возникали новые понятия.

Введем некоторые определения и утверждение.

Определение 1. Контекст $K_1 = (Q_1; P_1; I_1)$ называется частью контекста $K = (Q; P; I)$, если $Q_1 \subseteq Q$, $P_1 \subseteq P$ и для любых $x \in Q_1$, $y \in P_1$ отношение $(x; y) \in I_1$ верно тогда и только тогда, когда $(x; y) \in I$.

Определение 2. Если всякая часть контекста содержит хотя бы одно формальное понятие из FC и ни одно формальное понятие из FC не утрачивается и не формируются новые понятия, то разложение называется «неискажающим».

Определение 3. Фрагментом $\omega = (p'; q'; J)$ контекста K называют часть контекста K, образованная парой формальных понятий $(q''; q') \in Q$, $(p''; p') \in S$, если

$$(q''; q') \leq (p'; p''),$$

что эквивалентно $q'' \subseteq p'$ (или $p'' \subseteq q'$).

Число фрагментов контекста K, образующих на каждой итерации фрагментации, равно

$$\| T \| = \sigma(Q; P)^* |Q|^* |P|.$$

Теорема 1. Для всякого формального контекста K, множества FC и любой пары множеств (X,Y) справедливы высказывания:

1) если $(X,Y) \in FC$, то всегда в контексте K существует фрагмент $\omega = (p';q')$, $q \in Q$ и $p \in P$, причем возможно не единственный, в который это формальное понятие вложено;

2) если (X,Y) – формальное понятие некоторого фрагмента $\omega = (p';q')$ формального контекста K, то оно также принадлежит FC.

Доказательство теоремы представлено в работе [3]. Согласно данной теореме, фрагментация контекста на части производится с сохранением искомых формальных понятий.

Второе правило: правило остановки итерационного процесса фрагментации. Необходимо учитывать, что процесс нахождения множества FC должен быть выполнен за полиномиальное время.

Введем понятие плотности фрагмента.

Определение 4. Плотность фрагмента – величина, равная

$$\sigma(p';q') = \frac{\|(p';q')\|}{|p'|*|q'|},$$

где $|p'|*|q'|$ – размер фрагмента, а $\|p';q'\|$ – число единичных элементов фрагмента. Границы плотности фрагмента $0 < \sigma(p';q') \le 1$.

Утверждение 1. Всякий фрагмент $(p';q')$ с плотностью $\sigma(p';q') = 1$ содержит ровно одно формальное понятие (X,Y) контекста K и оно совпадающее с контекстом, т. е. $X = p'$ и $Y = q'$.

Из утверждения 1 следует, что фрагмент с плотностью 1 становится формальным понятием и далее не разлагается на фрагменты. Утверждение 1 доказано в работе [3].

Третье правило – правило восстановления множества FC. Алгоритм получения искомого множества FC контекста K и построения по нему решетки:

– поиск всех формальных понятий в каждом фрагменте;

– объединение полученных формальных понятий с помощью операции объединения;

– построение решетки формальных понятий.

Время выявления одного фрагмента составляет $O(|Q|*|P|)$. В общем на однократную фрагментацию контекста требуется время $O(\sigma(Q;P)*|Q|^2*|P|^2)$. Для разложения исходного контекста на фрагменты за полиномиальное время необходимо установить фиксированное число итераций или поставить ограничение на плотность формируемых фрагментов.

Заключение

Таким образом, предложенный метод фрагментации и дефрагментации формального контекста разлагает исходный контекст на фрагменты, сохраняя искомое множество формальных понятий. Итерационный процесс разложения контекста на фрагменты останавливается при достижении порогового значения на плотность фрагмента или заданного числа итераций разложения. При этом вычисление множества FC выполняется за полиномиальное время. Показан алгоритм восстановления множества FC из формальных понятий, полученных в фрагментах данного контекста.

Библиография

1. *Ganter B., Wille R.* Formal Concept Analyses: Mathematical Foundations. Springer Science and Business Media, 2012. – 314 p.

2. *Кузнецов С.О.* Автоматическое обучение на основе анализа формальных понятий // Автоматика и телемеханика. 2001. – № 10. – С. 3–27.

3. *Быкова В.В., Монгуш Ч.М.* Декомпозиционный подход к исследованию формальных контекстов // Прикладная дискретная математика. 2019. – № 44. – С. 113–126.

Bibliography

1. *Ganter B., Wille R.* Formal Concept Analyses: Mathematical Foundations. Springer Science and Business Media, 2012. – 314 p.

2. *Kuzneczov S.O.* Avtomaticheskoe obuchenie na osnove analiza formal`ny`x ponyatij [Automatic learning based on the formal concept analysis] // Avtomatika i telemexanika. 2001. – No. 10. – P. 3–27.

3. Bykova V.V., Mongush Ch.M. Dekompozicionny`j podxod k issledovaniyu formal`ny`x kontekstov [Decompositional approach to research of formal contexts] // Prikladnaya diskretnaya matematika. 2019. – No. 44. – P. 113–126.

УДК 517.958

DOI 10.53980/9785907599970_146

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

Намсараева Г.В.
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
Россия, Улан-Удэ, gerel@inboxl.ru

Работа посвящена исследованию разрешимости обратной задачи для уравнения Буссинеска нахождения вместе с решением также неизвестной правой части (неизвестных внешних источников). Особенностью изучаемой задачи является то, что искомая правая часть в ней определяется неизвестным множителем, зависящим лишь от временной переменной. Метод исследования в работе основан на применении метода Фурье и сведении задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

Ключевые слова: *уравнение Буссинеска, обратная задача, метод Фурье, существование, единственность.*

ON ONE INVERSE PROBLEM FOR THE BUSSINESC EQUATION

Namsaraeva G.V.
East Siberian State University of Technology and Management, Russia, Ulan-Ude
gerel@inbox.ru

The work is devoted to the study of the solvability of inverse problem for the Boussinesq equation of finding together with the solution of the unknown right-hand side (unknown external sources). The peculiarity of the studied problem is that the desired right part in them is determined by an unknown multiplier that depends only on the time variable. The research method in the work is based on the application of the Fourier method and the reduction of the problem to Volterra integral equation of the second kind.

Key words*: Boussinesq equation, inverse problem, Fourier method, existence, uniqueness.*

Пусть Ω есть ограниченная область пространства R^n с гладкой (бесконечно-дифференцируемой) границей Γ, Q – есть цилиндр $\Omega \times (0,T)$, боковая граница, −заданныефун $S = \Gamma \times (0,T)$ – боковая граница, $f(x,t), h(x), N(x)$ – заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0,T]$, x_0 – заданная точка из $\bar{\Omega}$.

Обратная задача: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$ такие, что для функции $u(x,t)$ выполняется уравнение

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} = f(x,t), \tag{1}$$

и выполняются также условия

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = q(t)h(x), \qquad (x,t) \in S, \tag{3}$$

$$\int_\Omega N(x)u(x,t)dx = 0, \qquad 0 < t < T. \tag{4}$$

Здесь и далее $\nu = \left(\nu_{x_1}, \nu_{x_2}, \dots, \nu_{x_n}\right)$ – вектор внутренней нормали к границе в текущей точке.

Изучаемая задача относится к классу обратных задач – именно, задач, в которых вместе с решением неизвестными являются те или иные входные данные. В настоящей работе вместе с решением неизвестным является множитель, зависящий от временной переменной и определяющий правую часть в граничном условии первого и второго рода.

Обратные задачи определения вместе с решением также неизвестных граничных данных ранее изучались для параболических уравнений – см. [2]-[5] для уравнения же Буссинеска подобные задачи ранее не изучались.

Мы применим подход к исследованию разрешимости обратной задачи для уравнения Буссинеска, основанный на применении метода Фурье и сведении задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

Проведем некоторые формальные рассуждения, касающиеся обратной задачи.
Введем функцию $\tilde{h}(x)$, которая является решением уравнения

$$\Delta\, \tilde{h}(x) - \tilde{h}(x) = 0 \tag{5}$$

при выполнении условия

$$\frac{\partial \tilde{h}(x)}{\partial \nu}|_{\Gamma} = h(x).$$

Определим необходимое пространство:

$$W = \left\{ v(x,t) \in W_2^2(Q), v_{tt}(x,t) \in L_2\left([0,T]; W_2^2(\Omega)\right)\right\}.$$

Будем искать решение обратной задачи в виде

$$u(x,t) = u_0(x,t) + V(x,t) + w(x,t), \tag{6}$$

где $u_0(x,t) \in W$ является решением уравнения

$$u_{0tt} -\Delta\, u_0 -\Delta\, u_{0tt} = f(x,t), \tag{7}$$

при выполнении для функции $u_0(x,t)$ условий

$$u_0(x,0) = 0, \qquad u_{0t}(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{8}$$

$$\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial \nu} = 0, \qquad (x,t) \in S, \tag{9}$$

функция $V(x,t)$ имеет вид

$$V(x,t) = q(t)\tilde{h}(x),$$

а функция $w(x,t)$ подлежит определению.
Тогда уравнение (1) примет вид

$$u_{0tt} -\Delta\, u_0 -\Delta\, u_{0tt} + q''(t)\tilde{h}(x) - q(t)\,\Delta\,\tilde{h}(x) - q''(t)\,\Delta\,\tilde{h}(x) + w_{tt} -\Delta\, w -\Delta\, w_{tt} = f(x,t).$$

Принимая во внимание (5) и (7) получим

$$w_{tt} -\Delta\, w -\Delta\, w_{tt} = q(t)\tilde{h}(x). \tag{10}$$

Из условий (2) и (3) получим условия для функции $w(t)$

$$w(x,0) = 0, \qquad w_t(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{11}$$

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial \nu} = 0, \qquad (x,t) \in S. \tag{12}$$

Метод Фурье дает формально решение задачи (10)-(12) в виде ряда

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) w_k(x), \tag{13}$$

где $w_k(x), k = 1,2, \ldots$ - ортонормированная система собственных функций, соответствующих собственным значениям $\lambda_k, k = 1,2, \ldots$, связанные уравнением

$$\Delta\, w_k = \lambda_k w_k,$$

при выполнении условия

$$\frac{\partial w_k}{\partial \nu}|_{\Gamma} = 0,$$

а $C_k(t)$ – неизвестные функции.

Положим также

$$\tilde{h}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, w_k(x), \qquad a_k = \int_\Omega \tilde{h}(x) w_k(x) dx. \tag{14}$$

Тогда из уравнения (10) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} [C_k''(t) w_k(x) - \lambda_k C_k(t) w_k(x) - \lambda_k C_k''(t) w_k(x)] = q(t) \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, w_k(x).$$

Отсюда

$$(1-\lambda_k) C_k''(t) - \lambda_k C_k(t) = q(t) a_k. \tag{15}$$

Обозначим

$$b_k = \frac{a_k}{1-\lambda_k}, \qquad \gamma_k^2 = \frac{-\lambda_k}{1-\lambda_k}.$$

Тогда решением задачи Коши

$$C_k''(t) + \gamma_k^2 C_k(t) = q(t) b_k, \qquad C_k(0) = C'_k(0) = 0,$$

являются функции

$$C_1'' = q(t) a_1;$$

$$C_k(t) = \frac{b_k}{\gamma_k} \int_0^t q(s) sin\, \gamma_k (t-s) ds, \qquad k = 2,3, \ldots.$$

Решение уравнения (10) примет вид

$$w(x,t) = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{b_k}{\gamma_k} \int_0^t q(s) sin\, \gamma_k (t-s) ds \right) w_k(x).$$

Таким образом получим решение (6)

$$u(x,t) = u_0(x,t) + q(t)\tilde{h}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{b_k}{\gamma_k} \int_0^t q(s) sin\, \gamma_k (t-s) ds \right) w_k(x). \tag{16}$$

Умножим (16) на $N(x)$ и проинтегрируем по Ω. Получим

$$\int_\Omega N(x) u_0(x,t) dx + q(t) \int_\Omega N(x) \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, w_k(x) dx - \int_\Omega N(x) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{b_k}{\gamma_k} \int_0^t q(s) sin\, \gamma_k (t-s) ds \right) w_k(x) dx = 0. \tag{17}$$

Обозначим

$$\psi(t) = \int_\Omega N(x) u_0(x,t) dx\,,$$

$$p_k = \int_\Omega N(x) w_k(x) dx\,.$$

$$\tilde{N}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k p_k}{\gamma_k} sin \gamma_k t.$$

Получим

$$q(t) \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, p_k + \int_0^t q(s) \tilde{N}(t-s) ds = -\psi(t). \tag{18}$$

Уравнение (18) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода относительно функции $q(t)$.

Сформулируем теорему существование решения обратной задачи, доказательство которой очевидно.

Теорема 1. Пусть выполняются условия: ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, p_k$$

абсолютно сходится и его сумма отлична от нуля;

$$N(x) \in C(\overline{\Omega}); h(x) \in W_2^1(\Omega);$$
$$\int_{\Omega} N(x)\tilde{h}(x) \neq 0.$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что выполняется $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, $f_{tt}(x,t) \in L_2(Q)$, обратная задача имеет решение $u(x,t)$ и $q(t)$ такое, что $u(x,t) \in W, q(t) \in W_2^2([0,T])$.

Доказательство. Из теории интегральных уравнений [1] следует, что данное уравнение имеет решение $q(t)$, принадлежащее пространству $L_2([0,T])$. Очевидно, что функция $u(x,t)$, представимая равенством (7), в котором функции $V(x,t)$ и $w(x,t)$ вычисляются через функцию $q(t)$, будет искомым решением уравнения (1) и будет удовлетворять условиям (2)-(4). Тогда будут выполняться включения $q(t) \in W_2^2([0,T])и u(x,t) \in W$. Теорема доказана.

Библиография

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Научный мир, 2010.

2. Кожанов А.И. Задачи с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений // Докл. АН. 2014. – Т. 457. – №2. – С. 152-156.

3. Кожанов А.И. Линейные обратные задачи для некоторых классов нестационарных уравнений // Сиб. Электрон. Мат. Изв. 2015. – Т. 12. – С. 264-275.

4. Костин А.Б., Прилепко А.И. О некоторых задачах восстановления граничного условия для параболического уравнения // Дифференц. Уравнения. 1996. – Т. 32. – № 11. – С 1519-1528.

5. Намсараева Г.В. Линейные обратные задачи для некоторых аналогов уравнения Буссинеска // Математические заметки СВФУ. 2014. – Т. 21. – № 2. – С. 47-59.

Bibliography

1. Vladimirov V.S. Equations of mathematical physics. M.: Scientific world, 2010.

2. Kozhanov A.I. Problems with integral conditions for some classes of nonstationary equations // Dokl. AN. 2014. – T. 457. – No. 2. – P. 152-156.

3. Kozhanov A.I. Linear inverse problems for some classes of nonstationary equations // Sib. Electron. Mat. Izv. 2015. – T. 12. – P. 264-275.

4. Kostin A.B., Prilepko A.I. On some problems of restoring the boundary condition for a parabolic equation // Differ. Equations. 1996. – T. 32. – No. 11. – P. 1519-1528.

5. Namsaraeva G.V. Linear inverse problems for some analogues of the Boussinesq equation // Mathematical notes of NEFU. 2014. – T. 21. – No. 2. – P. 47-59.

УДК 517.911.5

DOI 10.53980/9785907599970_150

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ[1*]

Ни М.К.*

**Восточно Китайский Педагогический Университет, Китай, Шанхай,*
Шанхайская ключевая лаборатория чистой математики и математической практики, Шанхай 200062, Китай, xiaovikdo@163.com

В настоящем отчете рассматриваются последние крупные достижения в исследованиях контрастных пространственно-структурных решений сингулярно возмущенных задач с разрывной правой частью. Основное внимание уделяется серии работ, посвященных нелинейным сингулярно возмущенным задачам второго порядка, включая задачи Дирихле для полулинейных, квазилинейных и слабо нелинейных систем. Тем временем обсуждаются обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка с однородным условием Неймана. Также включены тип кусочно-непрерывных задач Дирихле второго порядка для системы Тихонова и сингулярно возмущенная краевая задача параболического уравнения с разрывным членом.

Ключевые слова: *Сингулярно возмущенные системы с разрывной правой частью, решения вида пространственной контрастной структуры, быстро-медленная система, метод пограничных функций, метод сшивания.*

SPATIAL CONTRAST STRUCTURE FOR SINGULAR PERTURBATION PROBLEMS WITH RIGHT END DISCONTINUITIES

Ni M.K.*

** East China Normal University, China, Shanghai,*
Shanghai Key Laboratory of Pure Mathematics and Mathematical Practice, Shanghai 200062, China, xiaovikdo@163.com

This report surveys recent major achievements in studies of contrast spatial structure solutions of singularly perturbed problems with discontinuous righthand side. The main focus is a series of work about the second order nonlinear singularly perturbed problems, including semi-linear, quasi-linear, and weakly nonlinear system's Dirichlet problems. In the meanwhile, the first order ordinary differential equations with homogeneous Neumann condition is discussed. A type of piecewise-continuous second order Dirichlet problems of Tikhonov system and boundary value problem of singularly perturbed parabolic equation with discontinuous term are also included.

Key words*: Singularly perturbed system with Discontinuous Righthand Side, contrast spatial structure solution, slow-fast system, boundary layer function method, sewing connection method.*

Введение

Многие биологические, химические, инженерные и физические явления могут быть описаны дифференциальными уравнениями с краевыми условиями. Всякий раз, когда процесс преобразуется в математическую модель, ученые желают ухватить важные величины и отказаться от пренебрежимо малых величин, включая малые параметры. Модели, содержащие малые параметры, называются возмущенными моделями, упрощенная модель из которой выбросили малые параметры называются невозмущенными или вырожденными. В исследованиях решение возмущенной модели может быть заменено вырожденной частью без малых параметров при условии, что решение вырожденной задачи достаточно близко к решению соответствующей возмущенной задачи. Такой подход выполним в задачах с регулярными возмущениями, но он неверен в задаче с сингулярными возмущениями.

Проблемы сингулярных возмущений возникают во многих разделах прикладной математики, таких как пограничный слой в механике жидкости, граничный слой в механике твердого тела, поворотная точка в квантовой механике и линии и поверхности Стокса в математике. Небольшие

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ.

возмущения параметров могут привести к быстрому изменению связанных переменных в очень узком интервале. В этих задачах возмущение малых параметров может вызвать быстрые изменения связанных переменных в очень маленькой области вблизи границы или внутренней точки области. Такие задачи и легли в основу нижепредставленных исследований.

1. Постановка задачи

В данной работе изучаются задачи относящиеся к следующему виду:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u'' = f(u,x,\varepsilon), \quad 0 < x < 1, \\ u(0,\varepsilon) = u^0, \quad u(1,\varepsilon) = u^1, \end{cases} \tag{1}$$

где $\varepsilon \in I_{\varepsilon_0} = \{\varepsilon \mid 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \ll 1\}$ является малым параметром, x_0 - некоторая известная точка в интервале $(0,1)$, а функция $f(u,x,\varepsilon)$ имеет представляется как

$$f(u,x,\varepsilon) = \begin{cases} f^{(-)}(u,x,\varepsilon), \quad 0 \le x < x_0, \\ f^{(+)}(u,x,\varepsilon), \quad x_0 < x \le 1. \end{cases}$$

Решение $u(x,\varepsilon)$ относится к классу $u(x,\varepsilon) \in C^1[0,1] \cap \left(C^2(0,x_0) \cup C^2(x_0,1)\right).$

Основная идея на которую опирается все исследование заключается в использовании асимптотических разложений:

$$u(x,\varepsilon) = \begin{cases} u^{(-)}(x,\varepsilon) = \overline{u}^{(-)}(x,\varepsilon) + Lu(\xi_0,\varepsilon) + Q^{(-)}u(\xi,\varepsilon), \quad 0 \le x \le x_0, \\ u^{(+)}(x,\varepsilon) = \overline{u}^{(+)}(x,\varepsilon) + Ru(\xi_1,\varepsilon) + Q^{(+)}u(\xi,\varepsilon), \quad x_0 \le x \le 1, \end{cases} \tag{2}$$

где $\xi_0 = \dfrac{x}{\varepsilon}, \ \xi_1 = \dfrac{1-x}{\varepsilon}, \ \xi = \dfrac{x-x_0}{\varepsilon},$

$\overline{u}^{(\ll)}(x,\varepsilon) = \overline{u}_0^{(\ll)}(x) + \varepsilon \overline{u}_1^{(\ll)}(x) + \varepsilon^2 \overline{u}_2^{(\ll)}(x) + \ll$,

$Q^{(\ll)}u(\xi,\varepsilon) = Q_0^{(\ll)}u(\xi) + \varepsilon Q_1^{(\ll)}u(\xi) + \varepsilon^2 Q_2^{(\ll)}u(\xi) + \ll$,

$Lu(\xi_0,\varepsilon) = L_0 u(\xi_0) + \varepsilon L_1 u(\xi_0) + \varepsilon^2 L_2 u(\xi_0) + \ll$,

$Ru(\xi_1,\varepsilon) = R_0 u(\xi_1) + \varepsilon R_1 u(\xi_1) + \varepsilon^2 R_2 u(\xi_1) + \ll$.

2. Важные теоремы

Основная теорема базируется на следующих условиях:

Условие 1. Существование и гладкость функций $f^{(-)}(u,x,\varepsilon)$ и $f^{(+)}(u,x,\varepsilon)$ в области определения.

Условие 2. Существование решений $\varphi^{(-)}(x)$ и $\varphi^{(+)}(x)$ для вырожденный задач $f^{(-)}(u,x,\varepsilon) = 0$ и $f^{(+)}(u,x,\varepsilon) = 0$ соответственно. Более того предполагается, что $\varphi^{(-)}(x) < \varphi^{(+)}(x).$

Условие 3. Выполняются следующие неравенства

$$\begin{cases} f_u^{(-)}(\varphi^{(-)},x,0) > 0, \quad 0 \le x \le x_0, \\ f_u^{(+)}(\varphi^{(+)},x,0) > 0, \quad x_0 \le x \le 1, \end{cases}$$

Условие 4. Выполняются следующие неравенства

$$\int_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(-)}(s,x_0,0)ds > 0, \quad \tilde{u} \in (\varphi^{(-)}(x_0), p],$$

$$\int_{\varphi^{(+)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(+)}(s,x_0,0)ds > 0, \quad \tilde{u} \in [p, \varphi^{(+)}(x_0)),$$

Условие 5. Уравнение $H(p) = 0$ имеет единственное решение $p = p_0$, где

$$H(p)=\left(2\int\limits_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{p} f^{(-)}(u,x_0,0)\,du\right)^{\frac{1}{2}}-\left(2\int\limits_{\varphi^{(+)}(x_0)}^{p} f^{(+)}(u,x_0,0)\,du\right)^{\frac{1}{2}}$$

Теорема 1. Если Условия 1-5 выполняются, тогда решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (1) имеет асимптотическое приближение $U_{n+1}(x,\varepsilon)$ вплоть до $n+1$-го члена в виде (2) и оно удовлетворяет следующей оценке

$$\left|u(x,\varepsilon)-U_{n+1}(x,\varepsilon)\right|=O(\varepsilon^{n+2}).$$

Заключение

Глядя на текущее состояние отечественных и зарубежных исследований, можно сказать, что исследования по вышеупомянутым вопросам проводятся редко, и опубликованные статьи могут касаться только отдельных случаев. Общая трудность задач такого типа заключается в том, что: 1)Динамическое поведение возмущенной системы вблизи промежуточной кривой или поверхности промежуточной кривой очень сложное, и часто наблюдается чередование устойчивости, так что форма выражения асимптотического решения неизвестна, поэтому невозможно использовать предельную теорему Тихонова и теореме об асимптотическом разложении Васильевой 2) Если промежуточная кривая или межузловая кривая является ненаправленной гиперболической, то, следовательно, теория электронного геометрического сингулярного возмущения также недоступна, поэтому невозможно узнать, является ли решение для проблема существует вблизи промежуточной кривой или межузловой кривой. Существует ещё много вопросов данной теории требующие дальнейших изучений.

Библиография

1. *Нефёдов Н.Н., Ни М.К.,* Внутренние слои в одномерном уравнении реакция–диффузия с разрывным реактивным членом, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 55:12 (2015), 2042–2048.

2. *Pan Y.F., Ni M.K., Davydova M.A.,* Contrast Structures in Problems for a Stationary Equation of Reaction-Diffusion-Advection Type with Discontinuous Nonlinearity, Mathematical Notes, 2018, 104(5-6):735-744.

3. 3. *X. Wu and M.K. Ni,* Existence and stability of periodic contrast structure in reaction-advectiondiffusion equation with discontinuous reactive and convective terms, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2020, 91, 105457.

4. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефедов Н.Н., Асимптотическая теория контрастных структур (обзор), Автомат. и телемех., 1997, № 7, 4–32.*

5. Васильева А.Б, Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н., Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями, Дифференциальные уравнения и топология. I, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Труды МИАН, 268, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2010, 268–283.

6. *Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Орлов А.О.,* Стационарное уравнение реакции–диффузии с разрывным реактивным членом, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 57:5 (2017), 854–866.

Bibliography

1. *Ni M.K., Nefedov N.N.* Internal layers in the one-dimensional reation-diffusion equation with a discontinuous reactive term, Comput. Math. Math. Phys., 2015, 55(12): 2001-2007.

2. *Pan Y.F., Ni M.K., Davydova M.A.,* Contrast Structures in Problems for a Stationary Equation of Reaction-Diffusion-Advection Type with Discontinuous Nonlinearity, Mathematical Notes, 2018, 104(5-6):735-744.

3. *X. Wu and M.K. Ni,* Existence and stability of periodic contrast structure in reaction-advectiondiffusion equation with discontinuous reactive and convective terms, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2020, 91, 105457.

4. *Butuzov, V. F., Vasil'eva, A. B., Nefedov, N. N.* Asymptotic theory of contrast structures (review). (English. Russian original), Autom. Remote Control 58, 1997, No. 7, Pt. 1, 1068-1091.

5. *Vasil'eva A.B., Butuzov V.F., Nefedov N.N.,* Singularly perturbed problems with boundary and internal layers, Proc. Steklov Inst. Math., 2010, 268(1): 258-273.

6. *Levashova N.T., Nefedov N.N., Orlov A.O.,* Time-independent reation-diffusion equation with a discontinuous reactive term, Comput. Math. Math. Phys., 2017, 57(5): 854-866.

УДК 519.25:577.15/17:681.142.1

DOI 10.53980/9785907599970_153

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ЭФФЕКТИВНОСТИ

Осипов А.Л., Исаев Н.А.
Новосибирский государственный университет экономики и управления,
Россия, Новосибирск, alosip@mail.ru

Тенденции и уровень решения проблемы оценивания зависимости доза-эффект, предполагает использование различного рода математических моделей. Разработаны и исследованы модели и компьютерная система, позволяющие моделировать функцию эффективности по результатам независимых единичных испытаний с использованием непараметрического метода ядерной оценки регрессии и методов вейвлет-анализа. Проведен сравнительный анализ различных моделей в области зависимости доза-эффект.

Ключевые слова: *математическое моделирование, функция эффективности, вейвлет-анализ, пробит-анализ, непараметрический подход.*

MATHEMATICAL MODELING OF THE EFFICIENCY FUNCTION

Osipov A.L., Isaev N.A.
Novosibirsk State University of Economics and Management,
Russia, Novosibirsk, alosip@mail.ru

Trends and the level of solving the problem of estimating the dose-effect relationship, involves the use of various kinds of mathematical models. Models and a computer system have been developed and investigated that allow modeling the efficiency function based on the results of independent single tests using the nonparametric method of nuclear regression estimation and methods of wavelet analysis. A comparative analysis of various models in the field of dose-effect dependence is carried out.

Key words*: Mathematical modeling, efficiency function, wavelet analysis, probit analysis, nonparametric approach.*

Введение

Разработка новых лекарственных препаратов тесно связана с количественным анализом, который позволяет выявлять зависимость между дозой и эффектом, который вызывается этой дозой. Для решения этой мировой проблемы требуется вычислить функцию эффективности, которая позволяет оценивать вероятностную взаимосвязь между введенной дозой и наблюдаемым эффектом.

Для конкретной дозы лекарственного препарата функция эффективности позволяет рассчитывать величину токсического или иного эффекта, например, параметра LD_{50}.

Предлагаемый подход к построению функций эффективности токсичных и лекарственных веществ основан на принципах и законах математической статистики и прикладной теории вероятностей[1].

1. Постановка задачи

Через X обозначим минимальную дозу, при воздействии которой у тест – объекта с заданной вероятностью проявился бы ожидаемый эффект. Пусть Y экспериментально испытанная доза, а W – наблюдавшийся у тест – объекта эффект. После испытания у тест – объекта заданной дозы Y проявляется либо положительный $W=1$, либо отрицательный $W=0$ эффект. При дозе больше гипотетической ($Y>X$) регистрируется положительный эффект, иначе отрицательный. Величина W служит индикатором события $\{Y>X\}$. Минимальная абсолютно эффективная доза представляет собой случайную величину с функцией распределения $F(x)=P(X<x)$. Ее следует определить и качественно оценить по экспериментальной выборке. Величина, описываемая $F(x)$, является функцией эффективности исследуемого лекарственного препарата или химического вещества [1-2].

В статье использовались различные алгоритмы математической статистики, включающие следующие методы: вейвлет-анализа ядерные оценки регрессии и пробит-анализа, [4-7]. Данные подходы использовались для оценивания функции эффективности.

При оценивании функции эффективности с помощью ядерной оценки регрессии применялись пять различных ядер. Наилучшие результаты показал метод, основанный на ядре Епанечникова [3].

При оценивании функции эффективности с помощью методов вейвлет-анализа применялись следующие вейвлеты: LITTLEWOOD&PALEY, Морле, DOG, Мексиканская шляпа.

При оценивании функции эффективности с помощью вейвлет-анализа наилучшие результаты показал метод, основанный методе DOG.

В таблице 1 представлены основные характеристики предсказания эффективных доз различными моделями.

Таблица 1 – Значения основных характеристик

Лекарственные препараты	ED_{50}					
	Эксперимент	Пробит-анализ	Непараметрический анализ	DOG	Морле	LITTLEWOOD&PALEY
Ацетилхолин	4,25	4,55	4,56	4,62	4,75	4,82
Адреналин	3,68	3,5	3,59	3,78	3,91	4.05
Фенамин	86,0	57,181	85,51	88,1	89,2	90,2

Из таблицы видно, что непараметрический подход с помощью ядра Епанечникова показывает наилучшие результаты по предсказанию параметра ED_{50}.

В таблице 2 представлены относительные ошибки эффективных доз рассчитанные различными математическими моделями.

Таблица 2 – Процент относительных ошибок

Лекарственные препараты	Процент относительных ошибок для различных методов				
	Пробит-анализ	Непараметрический анализ	DOG	Морле	LITTLEWOOD&PALEY
Фенамин	33,5	0,57	-2,44	-5,59	-4,88
Адреналин	4,89	2,45	-2,72	-6,57	-10,05
Ацетилхолин	-7,06	-7,29	-8,71	-10,99	-13,41

Функции эффективности для препаратов адреналин и ацетилхолин близки к нормальному распределению. Из таблицы 2 видно, что методы пробит-анализа и непараметрический метод дают близкие результаты.

Функция эффективности для фенамина не является нормально распределенной. Из таблицы 2 видно, что имеются значительные различия для фенамина непараметрическим методом и методом пробит-анализа.

Заключение

В статье для каждого из вышеописанных методов (пробит анализ, непараметрический метод на основе ядерной оценки регрессии, методы вейвлет-анализа) были построены и исследованы свои функции эффективности, позволяющие вычислять среднеэффективные дозы лекарственных препаратов и различных химических веществ. Сравнительный анализ методов пробит-анализа и вейвлет-анализа показал, что непараметрический метод с ядром Епанечникова показал лучшие результаты на реальных экспериментальных данных. Разработана компьютерная система, позволяющая оценивать между собой различные подходы к построению функции эффективности. В рамках работы решена важная научная задача по созданию алгоритмического и программного обеспечения для построения функции плотности с использованием вейвлет-анализа и преобразования Фурье в области восстановления функции эффективности.

Библиография

1. *Криштопенко С.В., Тихов М.С., Попова Е.Б.* Парадоксальная токсичность. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородской государственной медицинской академии, 2001. – 164 с.

2. *Осипов А.Л., Аношкин С.Н.* Непараметрический метод построения зависимости «доза-эффект» // Автометрия. 2006. – Том 42, – № 6. – С. 63–69.

3. *Епанечнков В.А.* Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности // Теория вероятностей и ее применения. 1969. – Том 14, – № 1. – С. 156–161.

4. *Исаева Е.В.* Оценивание функции плотности распределения с использованием вейвлета Морле // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2022. – № 2. – С. 22–27.

5. *Тимофеев В.С., Исаева Е.В.* Особенности оценивания функции плотности распределения с помощью не ортонормированных вейвлетов // Южно-Сибирский научный вестник. 2022. – № 2 (42). – С. 87–94.

6. *Тимофеев В.С., Исаева Е.В.* Об оценивании функции плотности распределения случайной величины с использованием вейвлетов // Научный вестник НГТУ. 2019. – № 4 (77). – С. 71–84.

7. *Осипов А.Л., Трушина В.П., Баглай Р.Е.* Информационные технологии в задачах классификации токсических веществ // Internatinal Journal of Advanced Studies. 2017. – Volume 7. – Number 4-2. – P. 79-84.

Bibliography

1. *Kryshtopenko S.V., Tikhov M.S., Popova E.B.* Paradoxical toxicity. – Nizhny Novgorod: Publishing House of the Nizhny Novgorod State Medical Academy, 2001. – 164 p.

2. *Osipov A.L., Anoshkin S.N.* Nonparametric method of constructing the dose-effect relationship // Autometry. 2006. – Volume 42, – No. 6. – pp. 63-69.

3. *Epanechnikov V.A.* Nonparametric estimation of multidimensional probability density // Probability theory and its applications. 1969. – Volume 14, – No. 1. – pp. 156-161.

4. *Isaeva E.V.* Estimation of the distribution density function using the Morlet wavelet // International Journal of Applied and Fundamental Research. 2022. – No. 2. – pp. 22-27.

5. *Timofeev V.S., Isaeva E.V.* Features of estimating the distribution density function using non-orthonormal wavelets // South Siberian Scientific Bulletin. 2022. – № 2 (42). – Pp. 87-94.

6. Timofeev *V.S., Isaeva E.V.* On estimating the density function of a random variable distribution using wavelets // Scientific Bulletin of NSTU. 2019. – № 4 (77). – Pp. 71-84.

7. *Osipov A.L., Trushina V.P., Baglay R.E.* Information technologies in the tasks of classification of toxic substances // Internatinal Journal of Advanced Studies. 2017. – Volume 7. – Number 4-2. – P. 79-84.

DOI 10.53980/9785907599970_156

РАЗВИТИЕ И ОБНОВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ БУДУЩИХ ИНЖЕНЕРОВ В МОНГОЛИИ

Очирбат Баатарын*, Балжинням Цангиагийн*, Ганзориг Надмидцэдэнгийн*

**Монгольский Государственный Университет Науки и Технологии, г.Улан-батор, Монголия*
ochirbat@must.edu.mn, baljinnyam.tsangia@must.edu.mn, nganaa@must.edu.mn

В настоящем докладе рассматривается обзор развития и обновления математического образования будущих инженеров в Монголии на примере Монгольского государственного университета науки и технологии (МГУНТ). С 1959 года в Монголии впервые начали подготовить отечественные инженеры, как строительные и инженеров-экономистов в Монгольском государственном университете (МонГУ). С этого начинается история инженерного образования Монголии и МГУНТ. Это интересно, что первые студенты инженерной специальности были подобраны из лучших студентов физико-математического факультета того университета. Для подготовки хороших инженеров в стране, их математическое образование и уровень подготовки применения математики и математических методов в инженерных делах всегда являлись важной задачей перед университетом.

В последние более 20 лет МГУНТ внедряли разнообразные обновление в своём учебном программе и деятельности для того чтобы, улучшить качество инженерного образования и в том числе математического образования будущих инженеров. Здесь приведены некоторые примеры обновительных работ и развития, касающие инженерного математического образования.

Ключевые слова: *инженерное образование, математическое образование, учебная программа, уровень применения математических методов.*

DEVELOPMENT AND RENOVATION OF MATHEMATICAL EDUCATION FOR FUTURE ENGINEERS IN MONGOLIA

Ochirbat Baatar*, Baljinnyam Tsangia*, Ganzorig Nadmidtseden*

**Mongolian University of Science and Technology*
ochirbat@must.edu.mn, baljinnyam.tsangia@must.edu.mn, nganaa@must.edu.mn

In this note was reported the overview of the development and renovation of mathematical education for future engineers in Mongolia in case of Mongolian University of Science and Technology (MUST). In Mongolia started to prepare the national engineers, as construction engineers and engineer-economists in 1959 at the Mongolian State University. Since that time the begins the history of Mongolian engineering education and MUST. It is interesting that first students for the first engineering programs were selected from the best students of the Physics-Mathematics Faculty of the university. For preparing best engineers in the country, the university is always giving much attention to their mathematical education and ability to use mathematical methods in the engineering applications.

During the past more than 20 years the MUST has implemented different kind of renovations in its academic programs and activities for getting an improvement in quality of engineering education, in particularly, mathematical education for future engineers. Here we introduced some examples of renovation works and results connected with engineering mathematical education.

Key words: *engineering education, mathematical education, academic program, ability to us mathematical methods*

Введение

Монгольский государственный университет науки и технологии был создан в 1969 году в структуре Монгольского государственного университета как его составное подразделение. Отметим что, с 1959 года первые инженерные программы были открыты в МонГУ. В 1982 году МГУНТ отделился от МонГУ, и начал дейсвовать как самостоятельное высшее учебное заведение инженерного профиля страны. Сегодня университет стал одним из ведуших университетов Монголии

и имеет мощный потенциал в своём учебно-исследовальской деятельности. МГУНТ также лидирует своими обновительными работами и успешными реализациями разных передовых опытов в высшем образовании Монголии. В рамках этих работ университет сделал ряд важнейших шагов для улучшения математического образования по подготовке будущих инженеров в новом веке технологического развития. МГУНТ назывался с 1982 года Политехнический Институт, а с 1991 года Монгольский Технический Унивеситет и с 2001 года был переименован как Монгольский Государственный Университет Науки и Технологии.

В настоящее время МГУНТ имеет10 составных профильных Школ (School), Технологический колледж (КОСЭН) и Школа-лицей в Улан-Баторе, и 3 филиалов в городах Дархан и Эрдэнэт, и в Южно-Гобийском аймаке. В университете работает около 1100 профессоров и преподавателей, более 900 сотрудников, и обучаются около 20000 студентов в разных инженерно-технологических направлениях. Университет выпускал за прошедшее более 60 лет почти 90000 инженеров и специалистов в разных отраслях национального производсвенного сектора. Сегодня университет успешно развивает многосторонные сотрудничество с более 160 зарубежными университетами и реализует совместные учебные программы. В последные годы университет даёт большое значение к международной аккредитации ведущих учебных программ и более 10 программ были аккредитованы по организациями ABET и ASIIN.

Развитие математического образования в МГУНТ

Согласно Постановлению № 247 от 1969 года Совета Министров Монгольской Народной Республики было принято решение о создании Политехнического института, и впервые был создан Кафедра Высшей математики Политехнического института с 13 преподавателями из кафедер Математического анализа и Алгебро-геометрии Монгольского государственного университета. В 1987 году в Политехническом институте был создан Общеобразовательный факультет с кафедрами высшей математики, общей химии, физики и физической культуры, позже кафедры философии, политической экономии и истории были объединены в факультет.

С этих времен преподаватели давали полные курсы Высшей математики и Специальные курсы математики, как Теория вероятностей и математическая статистика, Дифференциальные уравнения и Вычислительная математика, всем инженерным студентам Политехнического института по программе советского политехнического вуза.

Школа Математики с Кафедрами Математики и Технической механики была создана в сентябре 2000 года в результате реструктуризации Монгольского Технического Университета. Согласно Постановлению Правительства № 181 от 2001 г., Технический университет Монголии был преобразован в Университет науки и технологий, а приказом ректора Университета науки и технологий № 196 от сентября 2002 г. Кафедра математики была разделен на 5 профессорско-преподавательские группы: Инженерная математика, Теория вероятностей и математическая статистика, Дифференциальные уравнения, Системно-динамическое моделирование и Прикладная математика.

В кафедре математики были открыты бакалаврские программы обучения «Инженерная математика» с 1997 г., «Математическое моделирование» с 2001 г, с 2001 г. 2-х годичная инженерная подготовительная программа на немецком языке, и чуть позже с 2003 г. были открыты магистрские и докторские программы по специальным направлениям как «Методы оптимизации», «Системно-динамическое моделирование», «Методика обучения математике», «Дифференциальные уравнения», «Экономико-математическое моделирование» и начаты обучения.

С 1997 года были изданы первые унивеситетские учебники и учебные пособия по математике как Инженерная математик I, II и другие. Теперь во всех математических курсах применяются собственные учебники и учебные пособия унивеситета.

С 2003 года начали обучение использования инженерных математических пакет программ компьютерного расчета для инженерно-технологических студентов МГУНТ как Derive, Matlab и Mathcad и другие. Связи с этим преподаватели кафедры математики перерассмотели и изменили содержание основных курсов и методику преподавания математики.

С 2014-2015 учебного года в рамках реструктуризации МГУНТ были распущены профессорско-преподавательские группы и Отделение математики было переименовано в Кафедру математики, продолжают реализовываться 2-летняя программа инженерной подготовки на немецком языке, 1 докторская и 3 магистерской программы. С 2018-2019 учебного года реализуется совместная программа бакалавриата по программе “Статистика 2+2” со Северо-западным Политехническим

университетом КНР, и пока первые 4 студентов уже закончили обучение в Китае и получили двойные дипломы.

На сегодняшний день на кафедре математики работают 1 заведующий кафедрой, 2 профессора, 2 профессора-консультанта, 4 доцента, 18 старших преподавателей, 15 преподавателей и 1 мастер обучения, всего 43 человека. Более 55 процентов преподавателей кафедры имеет ученые степени и они зашитились не только в Монголии, а в зарубежом как в Германии, Японии, Южном Корее, КНР и Франции. Это обстоятельство влияет позитивно развитию не только учебных, но и научно-исследовательских работ самой кафедры.

Монголо-Японский совместный Проект для развития Инженерно-технологического высшего образования (2014-2027)

По договору между Правительствами Монголии и Японии с 2014 года реализуется проект развитии Инженерно-технологического высшего образование. В период реализации проекта обучаются в общей сложности 1000 инженеров, исследователей и студентов из МГУНТ и МонГУ в Японских университетах и Японских национальных технологических колледжах по разным ведущим инженерно-технологическим программам.

Студенты, полностью соответствующие требованиям к студентам и прошедшие отбор, будут зачислены на 1,5-летнюю подготовительную программу обучения японскому языку в МГУНТ. Кредитный рейтинг курса будет таким же, как кредитный рейтинг МГУНТ, и студент будет нести ответственность за плату за обучение в течение периода обучения в Монголии. Учащийся, успешно завершивший подготовительную программу обучения КОСЭН и сдавший экзамен EJU, будет переведен на 3-й курс Koocen School в Японии в апреле следующего года. Учиться в Японии в общей сложности 3 года и получить высшее образование до бакалавриата. После окончания учебы КОСЭН может участвовать в дополнительных курсах учебной программы КОСЭН и получать образование бакалавра в период работы. Однако студенты, не сдавшие экзамен EJU, будут зачислены на 2-й курс МГУНТ.

В рамках данного проекта реализованы следующие программы:

Учебная программа КОСЕН-а (1.5+3) (до 200 студентов)

Совместная программа бакалавриата (2+2), (до 320 студентов по специальности Строительного инженера, Механического инженера и Архитектуры)

Совместное исследование (по 10 ведущими направлениями науки-технологий)

Деятельность по закупке оборудования (обновление исследовательских лабораторий МГУНТ)

Исследования без степени (повышение квалификаций профессоров-преподавателей МГУНТ, до 180 человеков)

Дипломные исследования (магистрские и докторские обучение в Японии, до 300 человеков)

Подготовительная программа совместного бакалавриата проводится первые два года в МГУНТ. Здесь студенты обучаются интенсивный полный курс японского языка. Наряду с этим обучаются все общие инженерные фундаментальные курсы как математика, физика, химия, механика и другие. Причем, все эти курсы поводятся по программам японских технических вузов. В некоторых курсах поработали вместе монгольские и японские профессора. Это позволял сравнить с японскими вузами и перерассмотреть учебные программы и содержания математических курсов МГУНТ и внедряются некоторые содержательные и методические опыты в учебных программах и процессах университета. Для студентов обучающихся по совместной программе, их математические учебники соответсвующих курсов были изданы за счет средств проекта и переданы в библиотеку МГУНТ.

Обновление академических учебных программ в МГУНТ

Учебные планы различаются в зависимости от специальности, и за программы отвечают профильные отделы. Учебная программа делится на бакалавриат и продвинутый курс. Учебная программа бакалавриата состоит из общих базовых, профессиональных базовых и профессиональных курсов.

Образовательные программы бакалавриата, реализуемые МГУНТ, представлены в таблице в соответствии с индексом и классификацией ЮНЕСКО. Как показано здесь, по состоянию на май 2023 года МГУНТу было предоставлено всего 113 программ категорий 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09 и 10.

Классификация ISCED-F-2013 программ бакалавриата МГУНТ

№	Индекс и классификация ЮНЕСКО		Количество лицензионных программ
1	02	Искусство и гуманитарные науки	6
2	03	Социальные науки, информация и журналистика	1
3	04	Бизнес, Менеджмент и Право	11
4	05	Естественные науки, математика и статистика	10
5	06	Информационные и коммуникационные технологии	9
6	07	Инжиниринг, производство и строительство	70
7	08	Сельское хозяйство, лесное хозяйство, рыболовство, ветеринария	1
8	09	Здравоохранение и социальное обеспечение	1
9	10	Услуга	4
Всего			113

Без разработки основных требований к учебному плану для каждой из этих программ бакалавриата, реализуемых МГУНТ, программы разделены на конкретные категории на основе классификации ISCED-F-2013, как показано в следующей таблице.

№	Индекс и классификация ЮНЕСКО		Классификация программ бакалавриата МГУНТ
1	02	Искусство и гуманитарные науки	Дизайн, медиапроизводство, лингвистика
3	04	Бизнес, Менеджмент и Право	Бизнес администрирование, менеджмент, социальные науки, туризм
4	05	Естественные науки, математика и статистика	Естественные науки
5	06	Информационные и коммуникационные технологии	Инженерия информационных и коммуникационных технологий
			Инженерные технологии информационно-коммуникационных технологий
6	07	Инжиниринг, производство и строительство	Инжиниринг
			Инженерная технология

Средний суммарный кредит (пакет часов) для программы бакалавриата, реализуемой МГУНТ, установлен на уровне 125 кредитов (кр), а распределение будет производиться, как показано в таблице. Другими словами, из 125 кредитов не более 103 кр будут обязательными и не менее 22 кр – дополнительными. Это распределение основано на установленном распределении курсов (30:30:40), которое действует в МГУНТ с 2014 года.

Общее распределение кредитов (пакетов часов) по учебной программе бакалавриата

Средний суммарный кредит 125			
Курсы программы Бакалавриата	**Всего кр**	**Обьязательные кр**	**Дополнитель-ные кр**
Общие базовые курсы (General education courses)	37	31	6
Базовые профессиональные курсы (Major core courses)	36	30	6
Курсы специализации (Major courses)	52	42	10

В связи с разделением программ бакалавриата на определенные категории, с другой стороны, чтобы исправить то, что после поступления на большинство программ преподавались математика, естественные науки и компьютерные расчеты с одинаковым содержанием, общая базовая математика, Курсы естествознания и информатики будут включены в базовую учебную программу с различным содержанием.

<table>
<tr><th rowspan="2">Классификация программ бакалавриата МГУНТ</th><th colspan="3">Распределение общих базовых курсов</th></tr>
<tr><th>Математика</th><th>Естественные науки</th><th>Компьютерные расчеты</th></tr>
<tr><td>Искусство и гуманитарные науки</td><td rowspan="2">Математик 1A
Математик 2A</td><td rowspan="2">Выбрать один из курсов прикладной физики и прикладной химии</td><td rowspan="2">Выбрать один из курсов, таких как «Применение информационных технологий I», «Алгоритмы и программирование».</td></tr>
<tr><td>Бизнес, Менеджмент и Право</td></tr>
<tr><td>Естественные науки</td><td rowspan="3">Математик 1B
Математик 2B
/Не входит в программы статистики/</td><td rowspan="3">Выбрать из курсов
Физика 1, 2,
Общая химия,
Органическая химия</td><td>Выбрать из курсов
Алгоритмы и программирование,
Основы программирования</td></tr>
<tr><td>Инженерные технологии</td><td rowspan="2">Основы программирования</td></tr>
<tr><td>Инженерные технологии информационно-коммуникационных технологий</td></tr>
<tr><td>Инженерия информационных и коммуникационных технологий</td><td rowspan="2">Математик 1C
Математик 2C</td><td rowspan="2"></td><td>Основы программирования</td></tr>
<tr><td>Инжиниринг</td><td>Алгоритмы и программирование</td></tr>
</table>

Также, в зависимости от категории программы, требуется изучить 1-2 курсов из таких курсов, как Теория вероятностей и математическая статистика, Основы математических расчетов, Вычислительная математика, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Дискретная математика, Исследование операций и Теория оптимизации. Содержание этих курсов также теперь обновляется.

Заключение

Улучшение инженерного математического образования является одним из важных факторов повышения качества инженерного образования и уровня подготовки для успешной работы в современном технологическом мире. В течение последних более 20 лет Монгольский государственный университет науки и технологии, как главное высшее учебное заведение страны в

инженерно-технологическом направлении, внедрили много обновительные работы в своём учебном процессе, как использование кредитных систем, существенные содержательные изменения в академичских учебных программах инженерных специальностей с учетом опытов зарубежных партнеров и развитие инженерного математического образования. В результате этих работ, для выпусников МГУНТ улучшается их уровень применения математики и математических методов в своих инженерных делах и исследованиях.

Библиография

1. Отчеты деятельности учебных год МГУНТ, 2001-2022, Ежегодные издания МГУНТ, Улан-Батор, Монголия (на монгольском языке).
2. Внедрение кредитных систем в МГУНТ, Рабочий отчет, 2001, издание МГУНТ, Улан-Батор, Монголия (на монгольском языке).
3. Учебные программы инженерных специальностей МГУНТ (1997-2017).
4. Ежегодные отчеты работ Монголько-Японского проекта для развития инженерного образования, (2014-2022), Рабочие отчеты, (на монгольском языке).
5. Разные решения для изменения и регулирования учебных программ в МГУНТ (2001-2022).

Bibliography

1. Reports of Academic years activities of the MUST, 2001-2022, Annual printings of the MUST, Ulaanbaatar, Mongolia, (in Mongolian).
2. Credit systems in the MUST, Working report, 2001, Printings of MUST, Ulaanbaatar, Mongolia, (in Mongolian).
3. Academic programs for Engineers of the MUST, (1997-2017).
4. Annual working report of the Mongolian-Japanese Engineering Education Development (MJEED) Project, (2014-2022), Working reports (in Mongolian).
5. Different decision documents and regulations connected with change in academic programs of the MUST, (2001-2022).

УДК 004.85:631.1:004.85: 528.8

DOI 10.53980/9785907599970_162

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ АГРОЭКОЛОГИЧЕСКОЙ ГРУППИРОВКИ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ЗЕМЕЛЬ

Павлова А.И.
Новосибирский государственный университет экономики и управления,
Россия, Новосибирск, annstab@mail.ru

В работе выполнена агроэкологическая группировка (классификация) сельскохозяйственных земель с применением данных дистанционного зондирования Земли (ДДЗ), ГИС и методов машинного обучения. Набор пространственных данных создан на основе векторной модели в виде операционно-территориальных единиц (ОТЕ). ОТЕ описывается уникальным номером, показателями рельефа, почв, уровнем залегая грунтовых вод, почвообразующими породами, вегетационными индексами.

Агроэкологическая группировка земель реализована на примере хозяйства АО «Зерно Сибири» Новосибирского района Новосибирской области с использованием методов машинного обучения: наивный байесовский классификатор (Gaussian Naïve Bayes, GNB), машина опорных векторов (Support Vector Machine, SVM), метод случайного леса (Random Forest, RF), деревья решений (Decision Tree, DT), метод ближайших соседей KNN (k-nearest neighbors). Лучшие показатели точности имеет модель машинного обучения RF. Точность модели в среднем составила 97,9% (при обучении 99,9%, тестировании 98,8%, крос-валиации 95,0%). Величина Root Mean Square Error (RMSE) равна 0,006: для обучающей 0,001; тестовой 0,076; валидационной выборок 0,123 соответственно). Среднее значение коэффициента каппа равно 0,97 (для обучающей 1,00; тестовой 0,982; валидационной выборок 0,927).

Ключевые слова: *методы машинного обучения, географические (геоинформационные) системы, данные дистанционного зондирования Земли, агроэкологическая группировка, сельскохозяйственные земли, космические снимки*

APPLICATION OF MACHINE LEARNING METHODS FOR AGRO-ECOLOGICAL CLUSTERING OF AGRICULTURAL LAND

Pavlova A.I.
Novosibirsk State University of Economics and Management
Russia, Novosibirsk, annstab@mail.ru

In this paper, an agro-ecological grouping (classification) of agricultural land has been carried out using remote sensing (RS) data, GIS and machine learning methods. The spatial dataset is based on a vector model in the form of operational-territorial units (OTUs). The OTEs are described by a unique number, landform, soil, groundwater table, soil-forming rocks, and vegetation indices.

Agro-ecological grouping of lands is implemented on the example of the farm «Zerno Sibiri» JSC in Novosibirsk region using machine learning methods: naive Bayesian classifier (Gaussian Naïve Bayes, GNB), Support Vector Machine (SVM), Random Forest (RF) method, Decision Tree (DT), k-nearest neighbours method (KNN). The best accuracy is the RF machine learning model. The accuracy of the model averaged 97.9% (with training 99.9%, testing 98.8%, and cross validation 95.0%). The Root Mean Square Error (RMSE) is 0.006: for training sample 0.001; test sample 0.076; validation sample 0.123 respectively). The mean kappa coefficient is 0.97 (for training 1.00; test 0.982; validation 0.927).

Keywords: *machine learning methods, geographic (geoinformation) systems, remotely sensed data, agro-ecological constellation, agricultural land, space images*

Введение

Для разработки адаптивно-ландшафтных систем земледелия, рационального размещения севооборотов необходима группировка (классификация) сельскохозяйственных земель. В отечественной литературе в процессе агроэкологической оценки и составлении составления карт группировки земель с помощью визуального анализа карт-слоев географической информационной

системы (геоинформационная система, ГИС) учитывают углы наклона рельефа и экспозицию склонов [1-3]. В работе [4] описаны косвенные признаки дешифрирования для картографирования переувлажненных земель с применением космических аэрофотоснимков без привлечения количественных показателей рельефа.

В зарубежной литературе учитывают количественные показатели рельефа (геоморфометрические параметры в различных целях: для комплексной оценки территории, классификации земель по степени их пригодности [5], прогнозного почвенного картографирования [6], оценки степени развития эрозионных процессов и др. [7]. Развитие методов цифрового моделирования рельефа, доступность данных дистанционного зондирования среднего и высокого пространственного разрешение, совершенствование открытых геоинформационных систем (ГИС) способствует расширению перечня геоморфометрических величин для описания топографической поверхности.

Вместе с тем актуальными остаются вопросы выбора количественных показателей рельефа для группировки сельскохозяйственных земель с применением алгоритмов машинного обучения, данных дистанционного зондирования Земли (ДДЗЗ) высокого пространственного разрешения.

Для агроэкологической группировки сельскохозяйственных земель использованы методы: наивный байесовский классификатор (Gaussian Naïve Bayes, GNB), адаптированный полиномиальный байесовский классификатор (Complement Naïve Bayes Classificator, CNBC), машина опорных векторов (Support Vector Machine, SVM), метод случайного леса (Random Foorest, RF), деревья решений (Decision Tree, DT), метод ближайших соседей KNN (k-nearest neighbors). Для построения моделей машинного обучения использованы: геоморфометрические показатели (31 показатель), балл бонитета почв, уровень залегания грунтовых вод, почвообразующие породы, вегетационные индексы (NDWI, SAVI, OSAVI, EVI2, PVI, GDVI, MCARI, NDRE, TSAVI). Пространственный набор был разделен на три выборки: обучающую (70% от общего количества примеров), тестовую (15%) и валидационную (15%).

1. Постановка задачи

К настоящему времени известны методические подходы классификации почвенно-растительного покрова с применением растровых моделей ГИС, включающие синтезированные изображения – электронные карты вегетационных индексов (ВИ). Разработано более 120 различных индексов, от выбора которых зависит результат классификации [8]. В литературе имеется небольшое количество работ, в которых освещены вопросы точности моделей машинного обучения (ММО), при создании которых использованы ВИ. Для повышения точности классификации используют большое число растровых информационных слоев. Это существенно увеличивает время обучения и тестирования ММО, составления тематических карт классификации сельскохозяйственных земель. При таком подходе требуются существенные большие вычислительные ресурсы и значительный объем оперативной памяти компьютера. Растровые модели данных ГИС занимают значительно больший объем в сравнении с векторными моделями. Поэтому применение построение ММО с привлечением векторных моделей ГИС имеет практическую значимость для автоматизированной группировки сельскохозяйственных земель.

Целью исследования является применение алгоритмов машинного обучения, ДДЗЗ и ГИС для классификации (группировки) сельскохозяйственных земель.

2. Материалы и методы исследований

Исследования выполнены на примере хозяйства АО «Зерно Сибири» Новосибирского района Новосибирской области, площадью 75 км^2 (54°51′03″ с.ш., 82°31′34″ в.д.; 54°59′55″ с.ш., 82°30′56″ в.д.; 54°59′33″ с.ш., 82°42′52″ в.д.; 54°52′16″ с.ш., 82°43′59″ в.д.) (рис.1). Территория исследований расположена вблизи г. Новосибирска, международного аэропорта Толмачево, с. Красноглинное. Основное направление деятельности хозяйства – зерновое и животноводческое. В геоморфологическом отношении изучаемая территория относится к Приобскому плато. Преобладающие абсолютные высоты местности составляют от 114 до 144 м. Углы наклона рельефа в среднем составляют от 0,5 до 1,5°, вертикальное расчленение рельефа 5-20 м, горизонтальное расчленение незначительное до 0,5 км/км^2.

В качестве использованы синтезированные мультиспектральные снимки высокого пространственного разрешения Sentinel-2A, приведенные в пространственному разрешению 12 м/пиксел, карты вегетационных индексов NDVI (Normalized Difference Vegetation Index), OSAVI (Optimized Soil Adjusted Vegetation Index), EVI2 (Enhanced Vegetation Index2), NDWI (Normalized Difference Water Index), SAVI, PVI, GDVI, MCARI, NDRE, TSAVI; топографическая карта,

космические снимки ALOS DSM (30 м/пиксел) и ALOS PALSAR (12.5 м/пиксел), почвенная карта и результаты полевого обследования территории. Наземные измерения на местности проводились с использованием спутникового геодезического приемника Triump-2 и включали определение координат характерных точек границ земельных участков, элементов рельефа, корректировочные почвенные обследования.

Процесс классификации сельскохозяйственных земель с применением алгоритмов машинного обучения, ДДЗЗ и ГИС состоял из этапов: формирование набора пространственных данных для машинного обучения, выбор информативных количественных показателей рельефа, построении ММО и ее обучение, оценка точности результатов обучения, отображение результатов машинного обучения на тематических картах группировки сельскохозяйственных земель. Совокупность операционно-территориальных единиц классификации земель представляется двумерной матрицей «объекты-признаки». Исходными признаками в модели машинного обучения служили геоморфометрические показатели рельефа, балл бонитета почв, почвенно-экологический индекс, уровень залегания грунтовых вод, почвообразующие породы, вегетационные индексы. Формирование набора обучающих данных осуществлялось случайным образом.

При построении модели машинного обучения (ММО) выполнялись процедуры проверки пропущенных значений. Максиминная или макс-мин нормализация данных выполнена с целью приведения набора пространственных данных к единому масштабу и повышения точности модели машинного обучения.

Набор пространственных данных использован в дальнейшем для обучения алгоритмами машинного обучения, тестирования и валидационной оценки. Таким образом пространственный набор данных был разделен случайным образом на три выборки данных: обучающая (70% от общего количества примеров), тестовая (15%) и кросс-валидационная (15%). Подбор размера выборок для обучения, тестирования и кросс-валидации осуществлялся эмпирическим путем при анализе результатов точности моделей машинного обучения. В процессе машинного обучения использованы следующие классы, отвечающие группам земель: 1 – плакорные (зональные) земли, 2 – слабоэрозионные земли, 3 – гидроморфные (переувлажненные) земли, 4 – полугидроморфные (среднепереувлажненные) земли, 5 – солонцовые земли. Для оценки точности классификации использованы параметры: точность ММО (accuracy), точность классификации по классам (precision), мера (recall), полнота (F1-score), средняя квадратичная ошибка (RMSE, Root Mean Square Error).

3. Результаты исследований.

В работе были созданы модели машинного обучения на основе методов: наивный байесовский классификатор (Gaussian Naïve Bayes, GNB), машина опорных векторов (Support Vector Machine, SVM), метод случайного леса (Random Foorest, RF), деревья решений (Decision Tree, DT), метод ближайших соседей KNN (k-nearest neighbors). При создании модели машинного обучения (ММО) созданы наборы пространственных данных с помощью ГИС. Набор пространственных данных включал слои цифровой пространственной модели землепользования хозяйства и содержал описания геоморфологических, почвенных, гидрологических особенностей территории хозяйства. Классификация сельскохозяйственных земель выполнена с применением подхода машинного обучения с учителем, в соответствии с которым заданы классы объектов. Принадлежность к классу объектов (группе земель) определена в виде символьного значения на основе электронной карты группировки сельскохозяйственных земель, составленной автором традиционным ручным способом.

Набор пространственных данных, использованный в работе состоял из 555490 примеров. Распределение примеров по классам неравномерное. К плакорным землям отнесены 120084 ОТЕ, к слабоэрозионным – 2329, к гидроморфным землям – 51913 ОТЕ, к полугидроморфным землям – 102886 ОТЕ и к солонцовым землям – 22788 ОТЕ. Неравномерное распределение по классам объектов связано с территориальным распределением земель по группам. Например, слабоэрозионные земли, распространены на незначительной части территории (менее 1% от площади) хозяйства по вершинам увалов. Анализ ММО показал, что наибольшей точностью характеризуется модель машинного обучения RF. Точность модели в среднем составила 97,9% (при обучении 99,9%, тестировании 98,8%, крос-валиации 95,0%). Величина Root Mean Square Error (RMSE) равна 0,006: для обучающей 0,001; тестовой 0,076; валидационной выборок соответственно 0,123). Среднее значение коэффициента каппа составило 0,97 (для обучающей 1,000; тестовой 0,982; валидационной выборок 0,927).

В результате на основании критерия Gini было выявлено, что наиболее информативными показателями рельефа являются вертикальное расчленение рельефа Wert (19,6%), уровень водосборного бассейна CNBL (19,92%), абсолютная высота DEM (12,49%), топографический индекс

RSL (11,07%) (Relative Slope Position), CI (Convergence Index) (11,02%), максимальная кривизна поверхности Maxcurv (10,11%), расстояние до гидрографической сети CND (8,81%), топографический индекс TPI (Topographic Position Index) (8,64%), топографический индекс Mid-Slope (8,44%), кривизна поверхности Profcurv (7,18%), тангенциальная кривизна поверхности Tancurv (5,53%), кривизна поверхности, учитывающая направление стока Flowcurv (4,72%), топографический индекс влажности TWI (4,47%).

Заключение. В условиях плоско-заболоченной равнины наиболее информативными показателями рельефа являются геоморфометрические величины, описывающие кривизну земной поверхности, близость к депрессиям и гидрографической сети, увлажненность территории, направление поверхностного стока. Менее информативными показателями рельефа для плоского-заболоченного типа рельефа оказали показатели LS-фактора (Length and Slope), Slope.

Библиография

1. *Ирмулатов Б.Р., Алманова Ж.С.* Опыт агроэкологической оценки земель и проектирования адаптивно-ландшафтных систем земледелия в Северном Казахстане на примере Павлодарской области // Сельскохозяйственные науки. 2017. – Вып. 5 (59). – С. 199-203.
2. *Онищук В.С.* Результаты агроэкологической оценки земель равнинных ландшафтов Приамурья для проектирования адаптивно-ландшафтной системы земледелия по ГИС-технологии // Адаптивные технологии в растениеводстве Амурской области: Сб. науч. трудов. Благовещенск: Изд-во Дальневост. аграр. ун-та, 2015. – С. 68-73.
3. *Макаренко Е.Л.* Агроэкологическая оценка и картографирование земель Верхнего Приангарья // География и природные ресурсы. 2019. – № 1. – С. 146-155.
4. *Ахтырцев А.Б.* Принципы и методика картографирвоания переувлажненных земель лесостепи // Вестн. Воронежского гос. ун-та. 2002.– Т.42. – № 3.– С.53-60.
5. *AbdelRahman M.A.E., Natarajan A. Hegd R.* Assessment of Land Suitability and Capability by Integrating Remote Sensing and GIS for Agriculture in Chamarajanagar District, Karnataka, India, The Egyptian Journal of Remote Sensing and Space Sciences, 2016. – № 19. – P. 125-141. https://doi.org/10.1016/j.ejrs.2016.02.001
6. *Florinsky I. V.* Digital Terrain Analysis in Soil Science and Geology. 2nd ed. Amsterdam: Elsevier Academic Press. 2016. 486 p.
7. *Pike R.J., Evans I.S., Hengl T.* Geomorphometry: A Birief Guide. In: Hengl T., Reuter H.I. (Eds.), Geomorphometry. Concepts, Software, Applications. Elsevier, 2009, 3-30. DOI: 10.1016/S0166-2481(08)00001-9.
8. *Xue J., Su B.* Significant Remote Sensing Vegetation Indeces: a review of developments and applications // Hindai J. of Sensors. 2017. Article ID 1353691 | https://doi.org/10.1155/2017/1353691

Bibliography

1. *Irmulatov B.R., Almanova J.S.* Experience of agro-ecological assessment of lands and design of adaptive-landscape farming systems in Northern Kazakhstan by the example of Pavlodar region // Agricultural Sciences. 2017. – Issue. 5 (59). – P. 199-203.
2. *Onishchuk V.S.* Results of agro-ecological assessment of the plains landscapes of the Amur Region for the design of adaptive landscape farming system using GIS-technology // Adaptive technologies in crop farming in the Amur Region: Collection of scientific papers. Blagoveshchensk: Far Eastern Agrarian University, 2015. - P. 68-73.
3. *Makarenko E.L.* Agroecological assessment and land mapping of Upper Priangarye // Geography and natural resources. 2019. – No. 1. - P. 146-155.
4. *Akhtyrtsev A.B.* Principles and methods of mapping of overmoistened lands of forest-steppe // Vestn. Voronezh State Univ. 2002 - Vol.42 – No. 3. –P.53-60.
5. *AbdelRahman M.A.E., Natarajan A. Hegd R.* Assessment of Land Suitability and Capability by Integrating Remote Sensing and GIS for Agriculture in Chamarajanagar District, Karnataka, India, The Egyptian Journal of Remote Sensing and Space Sciences, 2016. – No. 19. - P. 125-141. https://doi.org/10.1016/j.ejrs.2016.02.001

6. *Florinsky I. V.* Digital Terrain Analysis in Soil Science and Geology. 2nd ed. Amsterdam: Elsevier Academic Press. 2016. 486 p.

7. *Pike R.J., Evans I.S., Hengl T.* Geomorphometry: A Birief Guide. In: Hengl T., Reuter H.I. (Eds.), Geomorphometry. Concepts, Software, Applications. Elsevier, 2009, P. 3-30. DOI: 10.1016/S0166-2481(08)00001-9.

8. *Xue J., Su B.* Significant Remote Sensing Vegetation Indices: a review of developments and applications // Hindai J. of Sensors. 2017. Article ID 1353691 | https://doi.org/10.1155/2017/1353691

УДК 004.85:631.1:004.85: 528.8

DOI 10.53980/9785907599970_167

ПРИМЕНЕНИЕ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ УРОЖАЙНОСТИ

Павлова А.И.[1], Ким С.А[2].
[1]*Новосибирский государственный университет экономики и управления,*
Россия, Новосибирск, annstab@mail.ru
[2]*АО «Зерно Сибири»,*
Россия, Новосибирск, sakim@mail.ru

Работа посвящена задаче прогнозирования урожайности пшеницы с применением искусственных нейронных сетей на примере опытного стационара Сибирского научно-исследовательского института земледелия и химизации сельского хозяйства с 1986 по 2016 гг. Для прогнозирования урожайности пшеницы в качестве входных признаков использованы агроклиматические показатели тепло- и влагообеспеченности вегетационного периода (сумма осадков, температуры воздуха выше 10°, коэффициенты увлажнения Селянинова, Иванова), а также запасы продуктивной влаги в метром слое почвы. Для прогнозирования урожайности пшеницы использованы: многослойная искусственная нейронная сеть и сеть радиальных базисных функций. В результате исследований было выявлено, что методы обучения многослойных и радиальных нейронных сетей позволяют осуществлять прогноз урожайности с точностью (precision) от 81,3 до 93,2%. Радиальные базисные сети характеризуются лучшими показатели точности в сравнении с градиентными методами, учитывающими значение производной функции ошибки первого порядка. Более низкие значения точности были получены при использовании метода градиентного спуска: точность меньше на 11,9%, а RMSE больше на 0,314 в сравнении с сетью радиальных базисных функций (для тестовой выборки данных).

Ключевые слова: *машинные методы обучения, прогнозирование урожайности пшеницы, многослойные нейронные сети, радиальные базисные сети.*

USING ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS TO PREDICT WHEAT YIELDS

Pavlova A.I.[1], Kim S.A[2].
[1]*Novosibirsk State University of Economics and Management*
Russia, Novosibirsk, annstab@mail.ru
[2]*AO Zerno Sibiri,*
Russia, Novosibirsk, sakim@mail.ru

In the work forecasting of wheat yield using artificial neural networks on example of experimental stationary of Siberian research institute of agriculture and chemization of agriculture from 1986 to 2006 was carried out. For wheat yield forecasting agroclimatic indicators of heat and moisture supply during vegetation period (sum of precipitation, air temperature above 10°, Selyaninov and Ivanov moisture coefficients), as well as stocks of productive moisture in the meter layer of soil were used as inputs. A multilayer artificial neural network perseptron and a radial-baseline network were used to predict wheat yields. As a result of researches it has been revealed that methods of training of artificial multilayer and radial neural networks allow to carry out forecasting of yield with accuracy (precision) from 81.3 to 91.6%. Radial baseline networks have better precision than gradient based methods based on the first order derivative of the error function. Lower accuracy values were obtained using the gradient descent method: accuracy is lower by 11.9% and RMSE is higher by 0.314 compared to the RBF method (for the test data sample).

Keywords: machine learning methods, wheat yield prediction, multilayer neural networks, radial basis networks.

Введение

В России для прогнозирования продуктивности сельскохозяйственных культур широко применяются методы статистического и динамического анализа. Первая группа методов направлена на выявление статистических закономерностей влияния агрометеорологических условий на величину продуктивности посредством регрессионного анализа [1-2]. Данные методы обладают простым математическим аппаратом и позволяют в наглядном виде представить линейные зависимости между продуктивностью и отдельными факторами. Однако зависимость между агрометеорологическими параметрами и урожайностью культур часто имеет нелинейный характер. Вторая группа методов опирается на построение имитационных моделей, учитывающих не только основные факторы окружающей среды, но и процессы жизнедеятельности сельскохозяйственных культур, связанных с дыханием, фотосинтезом, и их развитием. Однако данные модели описываются сложным математическим аппаратом, предполагают использование большого объема сведений о росте и развитии культур в периоды вегетации, получаемых на основе длительных натурных измерений [3-4]. Информационные системы с имитационными моделями прогнозирования урожайности распространяются на коммерческой основе, требуют адаптации к конкретной территории, обладают функциональными ограничениями настройки параметров для пользователя. В целом связи между агрометеорологическими показателями, агросистемами и их продуктивностью нелинейны и неаддитивны [1]. В связи с этим актуальны исследования в области прогнозирования продуктивности агроценозов (агроэкосистем) ведущих культур с привлечением методов интеллектуального анализа данных, связанных с нечеткой логикой и нечеткими множествами, искусственными нейронными сетями (Artificial Neural Networks, ИНС) и алгоритмами машинного обучения (Machine Learning). Это обусловлено необходимостью получения достоверных прогнозных оценок урожайности для своевременного решения социально-экономических проблем, обеспечения продовольственной безопасности при резких колебаниях и аридизации климата [5-6]. Среди основных достоинств искусственных нейронных сетей выделяют способность к самообучению и помехоустойчивость при наличии пропусков в наборе данных [7-8].

Цель работы – прогнозирование продуктивности агроценозов лесостепной подзоны Приобского плато с применением искусственных нейронных сетей.

Материалы и методы. В ходе исследований использованы результаты опытных данных с 1986 по 2020 гг. стационара Сибирского научно-исследовательского института земледелия и химизации сельского хозяйства с 1986 по 2016 гг. лесостепной подзоны Приобского плато. Для прогнозирования урожайности пшеницы в качестве входных признаков использованы агроклиматические показатели тепло- и влагообеспеченности вегетационного периода (сумма осадков, температуры воздуха выше 10° за периоды май-июнь, май-июль, май-август, коэффициенты увлажнения Селянинова, Иванова за период вегетации), а также запасы продуктивной влаги в метром слое почвы.

В работе использованы методы обучения искусственных нейронных сетей: обратного распространения ошибки BackProp, метод стохастического градиента, Левенберга-Маквардта (Levenberq-Maquardt), радиальных базисных сетей.

Набор данных для обучения был разделен на обучающую (70% от общего количества примеров) и тестовые выборки данных (30% от общего количества примеров).

Для метода стохастического градиент оптимизируемой функции ошибки вычисляется на каждой итерации алгоритма с учетом градиента одного случайно выбранного примера из обучающего набора данных [9-10].

Алгоритм обратного распространения ошибки (BackProp) по сути представляющий градиентный алгоритм направлен на минимизацию среднеквадратической (среднеквадратичной) ошибки. Алгоритм предложен в 1974 г. П. Дж. Вербосом и позднее в 1986 г. усовершенствован Д. Румельхартом и Р. Вильямсом [11]. Алгоритм градиентного спуска с учетом моментов позволяет улучшить BackProp за счет избежания локальных минимумов функции ошибки, предусматривает сдвиг ошибки за счет коррекции весовых коэффициентов в направлении предыдущей итерации алгоритма. Это достигается путем подстройки на текущей итерации по экспоненциальным средним значениям весовых коэффициентов с учетом их значений на всех предыдущих итерациях алгоритма. В тоже время коэффициент момента позволяет ослабить колебания алгоритма вблизи оптимума, поддерживая подстройку весов в одном и том же направлении. Однако при больших значениях коэффициента момента алгоритм характеризуется чрезмерно большой инерционностью [12-14].

Алгоритм Левенберга-Маквардта (Levenberq-Maquardt) - метод оптимизации, часто используемый для построения нелинейных моделей для прогнозирования. Суть алгоритма состоит в

последовательном приближении заданных начальных значений параметров сети к исходному локальному оптимуму. Алгоритм Левенберга-Маквардта выступает одной из версий алгоритма Гаусса-Ньютона, но в отличие от него содержит параметр регуляризации [7,14]. К числу достоинств радиальных базисных сетей относится наличие одного промежуточного слоя нейронов, выполняющего нелинейное преобразование входных сигналов вокруг центра кластера согласно нелинейному закону. Нейронные сети с радиальными нейронами широко применяются для прогнозирования и аппроксимации сложных математических функций.

Результаты работы. Для многослойной нейронной сети использована архитектура, состоящая из одного скрытого слоя нейронов. Входной слой включал 9 нейронов, скрытый слой – 5 нейронов и выходной слой с одним нейроном. В качестве функции активации нейронов использована непрерывная сигмоидная. Выбор функции активации нейронов осуществлялся эмпирическим путем. Для этого выполнено обучение и тестирование модели с применением других распространенных функций (гиперболический тангес, порогая, Relu и другие). Подбор количества нейронов на промежуточном слое и коэффициента скорости обучения (равен 0,001) осуществлялся по результатам вычислительных экспериментов. В таблице 1 приведены показатели RMSE (Root Mean Square Error) и Precision (таблица 1).

Таблица 1 – Среднеквадратические ошибки и точность модели, полученные для обучающей и тестовой выборок данных

Метод	Обучающая выборка		Тестовая выборка	
	RMSE	Precision	RMSE	Precision
Gradient Descent	0,098	85,1	0,345	81,3
SGD	0,060	87,6	0,170	85,4
BackProp	0,056	88,4	0,093	87,5
Levenberq-Maquardt	0,032	96,7	0,054	91,6
RBF	0,016	97,3	0,031	93,2

Примечание: методы обучения Gradient Descent – метод градиентного спуска, SGD – метод стохастического градиента, BackProp – метод обратного распространения ошибки, Levenberq-Maquardt – метод Левенберга-Маквардта, RBF – радиальная базисная сеть; Precision – точность модели (%).

Заключение. Использование методов обучения многослойных сетей и радиальных базисных сетей позволяет создавать модели прогнозирования урожайности на основе агроклиматических параметров и значений о запасах продуктивной влаги в почве перед посевом. При этом радиальные базисные сети характеризуются лучшими показателями точности в сравнении с градиентными методами, учитывающими значение производной функции ошибки первого порядка. Более низкие значения точности модели машинного обучения были получены при использовании метода градиентного спуска. Точность меньше на 11,9% , а RMSE больше на 0,314 в сравнении с радиальной базисной сетью.

Библиография

1. Сиротенко О.Д. Методы оценки изменения климата для сельского хозяйства и землепользования: метод. пособие. – М.: Росгидромет, 2007. – 77 с.

2. Сиротенко О.Д. Математическое моделирование водно-теплового режима и продуктивности агроэкосистем. Л. Гидрометеоиздат, 1981.167 с.

3. Каличкин В.К., Понько В.А., Павлова А.И. К вопросу о климатически обеспеченной урожайности // Сибирский вестник сельскохозяйственной науки, 2009. – № 5. – С. 13-21.

4. Моделирование почвенных процессов в агроэкосистемах: учеб. пособие / Р. А. Полуэктов [и др.]. — СПб. : Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2002. — 148 с.

5. Сиротенко О.Д., Абашина Е.В., Павлова В.Н. Проблема оценки влияния изменений климата на продуктивность агросферы: модели, сценарии и результаты для сельского хозяйства России // Сб. Труды по прикладной ботанике, генетике и селекции. Т. 166. – СПб, 2009. – С.567 – 573.

6. Lobell D.B., Filed C.B. Global scale climate-crop yeld relationships and the impacts of recent warming // Environ. Res Lett. 2007. – №2. – P.1–7. doi:10.1088/1748-9326/2/1/014002

7. Хайкин С. Нейронные сети. Полный курс. – М.: Вильямс. 2018. – 1104 с.
8. Васильев А.Н. Математическое моделирование распределенных систем с помощью нейронных сетей // Математическое моделирование. 2007. Т. 19. – № 12. – С. 32–42.
9. Robbins H., Monro S. A stochastic approximation method // The annals of mathematical statistics. 1951. Vol.22. No.3. P. 400 – 407.
10. Loshchilov, I., Hutter F. SGDR: Stochastic Gradient Descent with Warm Restarts // Proceedings of ICLR. 2017. URL: https://arxiv.org/abs/1608.03983.Rumelhart D. E., Hinton G. E., Williams R. J. Learning representations by back-propagating errors //Nature. 1986. – Vol. 323. – P.533-536
11. Rumelhart D. E., Hinton G. E., Williams R. J. Learning representations by back-propagating errors //Nature. 1986. – Vol. 323. – P.533-536.
12. Amari Shun-ichi Natural gradient works efficiently in learning // Neural computation. 1998. – № 10 (2). – P. 251 – 276.
13. Learning to learn by gradient descent by gradient descent/ Andrychowicz, M., Denil, M., Gomez, S., Hoffman, M. W., Pfau, D., Schaul, T., & de Freitas, N. // In Advances in Neural Information Processing Systems. [Электронный ресурс]. 2016. URL: Retrieved from http://arxiv.org/abs/1606.04474
14. Ruder S. An overview of gradient descent optimization algorithms. 2016. URL: arXiv:1609.04747

Bibliography

1. Sirotenko O.D. Methods of Climate Change Assessment for Agriculture and Land Use: Methodology Manual. – Moscow: Roshydromet, 2007. – 77 p.
2. Sirotenko O.D. Mathematical modeling of water-heat regime and productivity of agroecosystems. L. Gidrometeoizdat, 1981. – 167 p.
3. Kalichkin V.K., Ponko V.A., Pavlova A.I. To a question on climatically secured crop yields // Siberian Bulletin of Agricultural Science, 2009. – No. 5. – P. 13-21.
4. Modeling of Soil Processes in Agroecosystems: Textbook / R.A. Poluektov [etc.]. - SPb. : Publishing house of S.-Petersburg State University, 2002. – 148 p.
5. Sirotenko O.D., Abashina E.V., Pavlova V.N. Problem of climate change impact assessment on agrosphere productivity: models, scenarios and results for Russian agriculture // Coll. on applied botany, genetics and breeding. T. 166. - SPb, 2009. – P.567 - 573.
6. Lobell D.B., Filed C.B. Global scale climate-crop yeld relationships and the impacts of recent warming // Environ. Res Lett. 2007. – No. 2. – P.1-7. doi:10.1088/1748-9326/2/1/014002
7. Haikin S. Neural networks. A full course. – Moscow: Williams. 2018. 1104 c.
8. Vasiliev A.N. Mathematical modelling of distributed systems using neural networks // Mathematical Modelling. 2007. T. 19. - No 12. - P. 32-42.
9. Robbins H., Monroe S. A stochastic approximation method // The annals of mathematical statistics. 1951. –Vol.22. – No.3. – P. 400 – 407.
10. Loshchilov, I., Hutter F. SGDR: Stochastic Gradient Descent with Warm Restarts // Proceedings of ICLR. 2017. URL: https://arxiv.org/abs/1608.03983.
11. Rumelhart D. E., Hinton G. E., Williams R. J. Learning representations by back-propagating errors //Nature. 1986. – Vol. 323. – P.533-536.
12. Amari Shun-ichi Natural gradient works efficiently in learning // Neural computation. 1998. – No. 10 (2). – P. 251 - 276.
13. Learning to learn by gradient descent / Andrychowicz, M., Denil, M., Gomez, S., Hoffman, M. W., Pfau, D., Schaul, T., & de Freitas, N. // In Advances in Neural Information Processing Systems. 2016. URL: Retrieved from http://arxiv.org/abs/1606.04474
14. Ruder S. An overview of gradient descent optimization algorithms. 2016. URL: arXiv:1609.04747.

УДК 378.1

DOI 10.53980/9785907599970_171

ЭФФЕКТИВНЫЕ ПРИЕМЫ И МЕТОДЫ ПОДГОТОВКИ УЧАЩИХСЯ К УСПЕШНОЙ СДАЧЕ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

Павлова Е.Б.*, Булгатова Е.Н.*, Елтошкина Е.В.**

** ФГБОУ ВО Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Россия, г. Улан-Удэ, pavlova2607@mail.ru*

*** ФГБОУ ВО Иркутский государственный аграрный университет им. А.А. Ежевского, Россия, г. Иркутск, EEV_Baikal2005@mail.ru*

Математика являлась и является значительной частью общечеловеческой и научной культуры, для успешной адаптации к постоянно изменяющимся требованиям современного общества уже недостаточно владеть математикой лишь на бытовом уровне. Леонардо да Винчи писал: «Ни одно человеческое исследование не может называться истинной наукой, если оно не прошло через математические доказательства». Математизация всех сфер жизнедеятельности человека является одним из доказательств универсальности математики. Ни одно техническое открытие невозможно без математической составляющей, сложных математических расчетов. Профильный экзамен, как правило, выбирают наиболее подготовленные школьники, ставящие себе цели получить инженерное образование, являющееся приоритетным на данный момент.

Неотъемлемой частью государственного экзамена по математике и учебных программ являются задачи на применение математических знаний в реальных жизненных ситуациях. К таким задачам можно отнести задачи на проценты, оптимальный выбор из предложенных вариантов (весьма неприятным сюрпризом такие задачи могут выступить на ОГЭ), вычисление площадей или других геометрических величин по рисунку, задачи на вычисление по формулам и т.п. Круг практико-ориентированных задач в ЕГЭ постоянно расширяется, в основном за счет задач вероятностно-статистического блока.

Ключевые слова: образование, методы, подготовка, государственный экзамен, вероятность, планирование, математика.

EFFECTIVE TECHNIQUES AND METHODS OF PREPARING STUDENTS FOR SUCCESSFUL USE IN MATHEMATICS

Pavlova E.B.*, Bulgatova E.N.*, Eltoshkina E.V.**

** East Siberian State University of Technology and Management, Russia, Ulan-Ude, pavlova2607@mail.ru*

*** Irkutsk State Agrarian University named after V.I. A.A. Yezhevsky, Russia, Irkutsk, EEV_Baikal2005@mail.ru*

Mathematics has been and is a significant part of the universal and scientific culture, for successful adaptation to the constantly changing requirements of modern society, it is no longer enough to master mathematics only at the everyday level. Leonardo da Vinci wrote: "No human research can be called true science unless it has gone through mathematical proofs." Mathematization of all spheres of human life is one of the proofs of the universality of mathematics. Not a single technical discovery is possible without a mathematical component, complex mathematical calculations. The profile exam, as a rule, is chosen by the most prepared students who set themselves the goal of obtaining an engineering education, which is a priority at the moment.

An integral part of the state exam in mathematics and curricula are tasks for the application of mathematical knowledge in real life situations. Such tasks include tasks for percentages, the optimal choice from the proposed options (such tasks can be a very unpleasant surprise at the OGE), calculation of areas or other geometric quantities from a drawing, tasks for calculating by formulas, etc. The range of practice-oriented tasks in the USE is constantly expanding, mainly due to the tasks of the probabilistic-statistical block.

Key words: *education, methods, preparation, state exam, probability, planning, mathematics.*

Введение. Накануне выпускных экзаменов особенно остро встает вопрос об эффективной подготовке к сдаче государственных экзаменов. Авторы на основе методических рекомендаций для учителей, подготовленных на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2022 года, и собственного опыта предлагают рассмотреть некоторые приемы, которые считают достаточно эффективными для подготовки и сдачи профильного экзамена по математике за курс средней школы [1].

Математика являлась и является значительной частью общечеловеческой и научной культуры, для успешной адаптации к постоянно изменяющимся требованиям современного общества уже недостаточно владеть математикой лишь на бытовом уровне. Леонардо да Винчи писал: «Ни одно человеческое исследование не может называться истинной наукой, если оно не прошло через математические доказательства». Математизация всех сфер жизнедеятельности человека является одним из доказательств универсальности математики. Ни одно техническое открытие невозможно без математической составляющей, сложных математических расчетов. Профильный экзамен, как правило, выбирают наиболее подготовленные школьники, ставящие себе цели получить инженерное образование, являющееся приоритетным на данный момент [2].

Постановка вопроса. Авторы попытаются дать обоснованную формулу успешной сдачи государственного экзамена по математике. Каждый гражданин России имеет конституционное право на бесплатное образование, может и должен получать компетентную помощь в подготовке к сдаче экзамена со стороны квалифицированного педагога. Такую поддержку могут оказать преподаватели вузов, так как фактически они представляют более широкую область математического знания, являются высококвалифицированными специалистами в своей области, видят общий вектор математической подготовки выпускников. Эти положения тем более актуальны в последние несколько лет, так как тесты ЕГЭ значительно усложнились, а задачи на вероятность и статистику вообще «вторгаются» в вузовскую программу и вызывают немалые затруднения у выпускников. Систематизирование материала, отработка вероятностных и геометрических подходов, побуждение к творчеству в решениях задач высокого уровня сложности (творчество, на наш взгляд, возможно при владении несколькими методами) и многое другое свидетельствует в пользу такого подхода. Итак, первый пункт успешной сдачи экзамена – это квалифицированный педагог, который может оказать нужную поддержку, будучи скорее проводником для школьника, не являясь истиной в последней инстанции. Философия сотрудничества, общение на «равных» приносят свои плоды.

Решение проблемы. В Концепции развития математического образования от 24 декабря 2013 года отмечена низкая мотивация современных школьников, связанная с тем, что общество недооценивает значимость математического образования. С такими проблемами общественной недооценки математики хоть раз, но сталкивался любой преподаватель математики. Дети, не обладающие особой осознанностью, зачастую считают, что выполнив определенное количество задач на некоторую тему, легко справятся с аналогичной задачей на экзамене. Именно такой подход и не приносит, как правило, ожидаемого эффекта. Операция аналогии, которую возводят в степень, многократно «нарешивая» однотипные варианты, здесь не работает. Единственным выходом из таких ситуаций является решение проблем мотивационного характера, и, когда ученик осознает нужность систематики в изучении материала, переходить к созданию базы теоретических знаний. Определения, свойства, теоремы, таблицы основных значений, таблицы производных и интегралов нужно знать, а не «изобретать» собственные. Нужна прочная теоретическая база, фундамент, на котором можно построить решения, порой очень оригинальные, любой задачи.

Еще несколько слов хотелось бы сказать о практико-ориентированных задачах. Неотъемлемой частью государственного экзамена по математике и учебных программ являются задачи на применение математических знаний в реальных жизненных ситуациях. К таким задачам можно отнести задачи на проценты, оптимальный выбор из предложенных вариантов (весьма неприятным сюрпризом такие задачи могут выступить на ОГЭ), вычисление площадей или других геометрических величин по рисунку, задачи на вычисление по формулам и т.п. Круг практико-ориентированных задач в ЕГЭ постоянно расширяется, в основном за счет задач вероятностно-статистического блока.

Пример 1. В торговом зале два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится кофе, равна 0,1. Вероятность того, что кофе закончится во втором автомате, такая же. Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах, равна 0,03. Найти вероятность того, что к концу дня кофе останется в двух автоматах.

Яркий пример задачи, где нужно отойти от так любимых нами независимых событий в одном испытании, чтобы перейти на уровень совместных. Пусть событие А - кофе закончится в первом автомате, В - кофе закончится во втором автомате

События А и В совместные, вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения. Проверка на независимость этих двух событий легко проводится нахождением произведения 0,1*0,1, отличному от 0,03.

Пример 2. Школьник Антон в среднем в месяц совершает 45 поездок в метро. Для оплаты поездок можно покупать различные карточки. Стоимость одной поездки для разных видов карточек различна. По истечении месяца Антон уедет из города и неиспользованные карточки обнуляются. Во сколько рублей обойдётся самый дешёвый вариант? (Тип 5 № 366651, сайт Дмитрия Гущина «Сдам ГИА»). Приводится таблица 1 стоимости проезда в метро по карточкам различного номинала:

Таблица 1 – Стоимость проезда в метро

Количество поездок	**Стоимость карточки (руб.)**	**Дополнительные условия**
1	40	школьникам скидка 15%
10	370	школьникам скидка 10%
30	1050	школьникам скидка 10%
50	1600	нет
Не ограничено	2000	нет

Оказывается, что для получения правильного ответа, нужно не только найти стоимость проезда при использовании каждой из карточек и выбрать самый бюджетный вариант, но и провести оценку комбинированного проезда, т.е. предусмотреть использование карточек разного номинала для месячного проезда. Наши немного инфантильные ученики к такому повороту событий бывают не готовы, им приходится постигать азы бытовой экономии средств с помощью теории, затем применять на практике.

Практико-ориентированные задачи по финансовой грамотности, на взгляд авторов, очень полезны в реальной жизни и готовят выпускников к таким событиям взрослой жизни как получения кредита в банке. Огромная (излишняя, чрезмерная) закредитованность населения может хоть немного понизиться, если каждый гражданин прикинет размеры выплат и оценит общую сумму выплат. Возможно, это принесет нашим юным гражданам понимание ответственности, сделает их финансовые планы более реальными.

Заключение. И в завершении хотелось бы отметить, что в наше непростое время техническое направление развития является приоритетным для России, у всех абитуриентов имеется прекрасная возможность поступить в технический вуз, в том числе и во ВСГУТУ, стать в дальнейшем компетентным специалистом в избранной области.

Библиография

1. Безрукова, Г. В. Система работы по подготовке к ОГЭ и ЕГЭ по математике / Г. В. Безрукова // Вестник научных конференций. – 2021. – № 5-3(69). – С. 14-16. – EDN OMNIVW.

2. Шкуркин, А. А. Методические рекомендации по подготовке учащихся к ЕГЭ и ОГЭ по математике и информатике / А. А. Шкуркин, Т. Г. Зайченко // Вестник научных конференций. – 2021. – № 8-2(72). – С. 106-108. – EDN SJEEAY.

Bibliography

1. Bezrukova, G. V. The system of work in preparation for the OGE and the Unified State Examination in mathematics / G. V. Bezrukova // Bulletin of scientific conferences. – 2021. – No. 5-3(69). – P. 14-16. – EDN OMNIVW.

2. Shkurkin, A. A. Methodological recommendations for preparing students for the Unified State Examination and OGE in mathematics and informatics / A. A. Shkurkin, T. G. Zaichenko // Bulletin of scientific conferences. - 2021. - No. 8-2 (72). – P. 106-108. – EDN SJEEAY.

УДК 378.1

DOI 10.53980/9785907599970_174

РАЗВИТИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Павлова Е.Б.*, Булгатова Е.Н.*, Елтошкина Е.В.**

** ФГБОУ ВО Восточно- Сибирский государственный университет технологий и управления Россия, г. Улан-Удэ, pavlova2607@mail.ru*
*** ФГБОУ ВО Иркутский государственный аграрный университет им. А.А. Ежевского Россия, г. Иркутск, EEV_Baikal2005@mail.ru*

Важной частью государственного экзамена по математике и современных учебных программ являются геометрические задачи, среди которых немало задач на применение математических знаний в быту, в реальных жизненных ситуациях.

Задача педагога состоит в помощи пытливым умам самостоятельного поиска постановки проблемы исследования блоком проблемных вопросов, подбором тематических задач разного уровня сложности. В качестве примера приводится задача, в которой поставлена проблема нахождения площади боковой поверхности правильной n-угольной пирамиды. С помощью измерений и вычислений определить площади боковых поверхностей правильных треугольной и четырехугольной пирамид. Затем перейти на более высокий уровень осознанности своих действий и обобщить результаты частного случая практико-ориентированной задачи на случай n-угольной пирамиды. В предложенном примере постановка проблемы небольшого исследования мотивирует к поиску рационального решения задачи и самостоятельным теоретическим исследованиям.

Эффективность использования коллективной исследовательской деятельности при обучении любой математической дисциплины в школе, колледже, вузе определяется тремя основными аспектами: дидактическим, процессуальным и организационным.

Учебные задачи хорошо поддаются решению при использовании такой групповой организационной формы деятельности как мозговой штурм. Эта групповая форма работы весьма эффективна и часто используется авторами на практике.

Ключевые слова: *исследования, деятельность, мозговой штурм, геометрия, экзамен, математика.*

DEVELOPMENT OF GEOMETRIC REPRESENTATIONS FOR EFFECTIVE USE IN RESEARCH ACTIVITIES

Pavlova E.B.*, Bulgatova E.N.*, Eltoshkina E.V.**

** East Siberian State University of Technology and Management, Russia, Ulan-Ude, pavlova2607@mail.ru*
*** Irkutsk State Agrarian University named after V.I. A.A. Yezhevsky, Russia, Irkutsk, EEV_Baikal2005@mail.ru*

An important part of the state exam in mathematics and modern curricula are geometric problems, among which there are many tasks for the application of mathematical knowledge in everyday life, in real life situations.

The task of the teacher is to help inquisitive minds to independently search for the formulation of the research problem with a block of problem questions, the selection of thematic tasks of different levels of complexity. As an example, a problem is given in which the problem of finding the lateral surface area of a regular n-gonal pyramid is posed. Using measurements and calculations, determine the areas of the lateral surfaces of regular triangular and quadrangular pyramids. Then move on to a higher level of awareness of their actions and generalize the results of a particular case of a practice-oriented task to the case of an n-gonal pyramid. In the proposed example, the formulation of the problem of a small study motivates the search for a rational solution to the problem and independent theoretical research.

The effectiveness of the use of collective research activities in teaching any mathematical discipline at school, college, university is determined by three main aspects: didactic, procedural and organizational.

Learning tasks lend themselves well to solving when using such a group organizational form of activity as brainstorming. This group form of work is very effective and is often used by authors in practice.
Keywords: *research, activity, brainstorming, geometry, exam, mathematics.*

Введение. Важной частью государственного экзамена по математике и современных учебных программ являются геометрические задачи, среди которых немало задач на применение математических знаний в быту, в реальных жизненных ситуациях. Вычисление площадей, объемов или других геометрических величин по рисунку, задачи на вычисление по формулам, выбор оптимального варианта, нахождение радиуса закругления арки в печи, которая должна быть куплена для парного отделения и так далее [1].

При этом количество справившихся с геометрией на экзамене настолько мало, что при сдаче ОГЭ по математике оценка «удовлетворительно» не может быть получена без как минимум двух геометрических заданий. Одной из причин сложившегося положения дел авторы видят в том, что важнейшие постулаты планиметрии, которую начинают изучать в 7 классе, проходят мимо учащихся, не формируется должным образом теоретическая основа, на которой можно строить решения более сложных, красивых планиметрических, а в дальнейшем и стереометрических задач.

Постановка вопроса. Дети не любят строить правдоподобные чертежи, не пытаются вложить смысл в очевидные для взрослого человека геометрические понятия. До некоторых трудно донести решения даже практических задач, где моделью может служить кусок раскраиваемой материи. Из квадрата вырезали прямоугольник. Найдите площадь получившейся фигуры (Тип 17 № 322861 сайт Дмитрия Гущина «Сдам ГИА»). Другой причиной можно назвать бурно развивающиеся компьютерные технологии, в любом графическом редакторе, не прилагая особых усилий, можно построить требуемый объект. С одной стороны это несомненный плюс, но с другой стороны такой устаревший предмет как черчение в курсе средней школы плавно перетекал в успешное изучение начертательной геометрии для инженерных специальностей в вузе.

Решение проблемы. Со своей стороны авторы предлагают практиковать некоторые виды исследовательской деятельности студентов колледжей и вузов внедрить в курс изучения стереометрии в старшей школе. Приведем такой пример: сторона квадрата ABCD, лежащего в основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, равна 8, а боковое ребро равно 14. Точка К – середина ребра CC_1, на ребре BB_1 отмечена точка L, такая, что $BL:LB_1=3:4$.

а) Докажите, что плоскость AKL делит ребро DD_1 отношении 1:13, считая от точки D.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и AKL.

Построение сечения в данной задачи вызывает определенные трудности даже у подготовленных учеников, но после детального разбора задания с преподавателем, ученики предлагают свои методы, находят их не менее трех. Нахождение угла между плоскостями без координатного метода становится уже интересной «игрой», ведь определив общую для двух плоскостей прямую, общие перпендикуляры все проводят по-своему. В этой ситуации демонстрируется наличие определенного уровня математической подготовки, отчетливо видна степень подготовленности обучающихся к самостоятельной работе, в том числе исследовательской. На основе анализа содержания математических программ для колледжа, мы предлагаем некоторые рекомендации по планированию исследовательской деятельности в старшей школе и на первом курсе высших учебных заведений.

По мнению авторов, неплохо было бы при любой возможности предлагать выполнение чертежей, в разных проекциях, с выносными чертежами. Несмотря на увеличивающуюся трудоемкость, эти операции принесут только пользу. Итак, построение грамотных стереометрических чертежей, бонусом является развитие пространственного воображения. Этот этап можно соотнести с постановкой проблемы в решении задачи. Визуализировав условия задачи, приступаем к этапу выдвижения гипотезы. Например, очень активно обсуждается тот или иной угол между плоскостями, ученикам приходится формулировать определение угла, приводить примеры или контрпримеры (см.пример выше). И, наконец, доказательство утверждения или гипотезы. Здесь пригодятся разные методы доказательства, придется решать несколько вспомогательных задач для достижения результата. На каждом этапе исследовательской деятельности поднимаются проблемные вопросы, решаются вспомогательные задачи, составляются планы или схемы, накапливается изученный материал.

Конечно, каждую задачу обрабатывать с помощью постановки познавательной проблемы бывает достаточно сложно, но некоторые виды сложных стереометрических и параметрических задачу уместно подавать именно так, чтобы постепенно готовить обучающихся к самостоятельной исследовательской работе и увеличивать степень самостоятельности молодых умов. Очень

эффективной организационной формой проведения исследовательских учебных занятий авторы считают групповую (коллективную) самостоятельную работу. К такому виду деятельности обучающихся необходимо предварительно подготовить с помощью самостоятельной работы с использованием заданий различного уровня сложности, с постепенным переходом к более сложным. Методика подготовки к решению задач высокого уровня сложности здесь, как впрочем и везде в математике, одна – изучение теории, знание определений, теорем и свойств геометрических фигур.

Задача педагога - помочь пытливым умам в самостоятельных поисках постановки проблемы исследования блоком проблемных вопросов, подбором тематических задач разного уровня сложности. В качестве примера приведем задачу, в которой поставлена проблема нахождения площади боковой поверхности правильной n-угольной пирамиды (здесь очень уместны сохранившиеся в каждом математическом кабинете модели пирамид). С помощью измерений и вычислений определить площади боковых поверхностей правильных треугольной и четырехугольной пирамид. Затем перейти на более высокий уровень осознанности своих действий и обобщить результаты частного случая практико-ориентированной задачи на случай n-угольной пирамиды. В предложенном примере постановка проблемы небольшого исследования мотивирует к поиску рационального решения задачи и самостоятельным теоретическим исследованиям.

Эффективность использования коллективной исследовательской деятельности при обучении любой математической дисциплины в школе, колледже, вузе определяется тремя основными аспектами: дидактическим, процессуальным и организационным.

Учебные задачи хорошо поддаются решению при использовании такой групповой организационной формы деятельности как мозговой штурм. Эта групповая форма работы весьма эффективна и часто используется авторами на практике. Первый этап – «накидывание» как можно большего количества решений, при этом нужно следить за плюрализмом мнений, не давая оценки любым, даже самым «бредовым» гипотезам. Второй этап предполагает анализ и отбор удачных решений, при этом эффективность учебного метода возрастает в разы, если ученики проводят операцию самооценивания. Усиление степени самостоятельности учебной работы и вовлеченности в учебное исследование намечают линии организационных изменений в преподавании. Первый этап можно охарактеризовать как поисковый, второй как критический. Ценность этого эффективного приема тем больше, чем чаще мы прибегаем к нему в обычной жизни, рассматривая свои решения, анализируя их, корректируя в случае необходимости.

Заключение. Эффективность использования коллективных учебных исследований зависит как от работы преподавателя, который выбирает организационные формы их проведения, но и от постепенной подготовке студентов к самостоятельным исследованиям. Задача педагога в данной ситуации привести студентов к осознанной саморегуляции, развить в конечном итоге индивидуальность будущего специалиста, получить обратную связь.

Библиография

1. Безрукова Г.В. Система работы по подготовке к ОГЭ и ЕГЭ по математике / Г. В. Безрукова // Вестник научных конференций. – 2021. – № 5-3(69). – С. 14-16. – EDN OMNIVW.

Bibliography

1. Bezrukova G.V. The system of work in preparation for the OGE and the Unified State Examination in mathematics / G. V. Bezrukova // Bulletin of scientific conferences. - 2021. - No. 5-3(69). – P. 14-16. – EDN OMNIVW.

УДК 519.63

DOI 10.53980/9785907599970_177

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ГЛОБАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ В РАЗНОСТНЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ДИФФУЗИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1*]

Пименов В.Г.
Уральский федеральный университет,
Россия, Екатеринбург, v.g.pimenov@*urfu.ru*

Для диффузионного уравнения с функциональным эффектом запаздывания проводится дискретизация задачи. Конструируется базовый метод Кранка-Николсон с кусочно-кубической интерполяцией и экстраполяцией продолжением. Выписывается уравнение для главного члена асимптотического разложения глобальной погрешности. При определенных предположениях обосновывается законность применение процедуры экстраполяции по Ричардсону и строится соответствующий метод четвертого порядка малости относительно шага дискретизации по времени и пространству.

Ключевые слова: *уравнение диффузии, функциональное запаздывание, метод Кранка-Николсон, кусочно-кубическая интерполяция, экстраполяция продолжением, метод Ричардсона.*

ASYMPTOTIC EXPANSION OF THE GLOBAL ERROR IN DIFFERENCE METHODS FOR SOLVING DIFFUSION EQUATIONS WITH FUNCTIONAL DELAY

Pimenov V.G.
Ural Federal University, Russia, Ekaterinburg
v.g.pimenov@urfu.ru

For a diffusion equation with a functional delay effect, the problem is discretized. The basic Crank-Nicholson method with piecewise cubic interpolation and extension extrapolation is constructed. An equation is written for the main term of the asymptotic expansion of the global error. Under certain assumptions, the validity of the application of the Richardson extrapolation procedure is substantiated and the corresponding method of the fourth order of smallness with respect to time-step and space-step is constructed.

Key words*: diffusion equation, functional delay, Crank-Nicolson method, piecewise cubic interpolation, extrapolation by continuation, Richardson method.*

Введение

Уравнения в частных производных с запаздывающим аргументом широко применяются в математическом моделировании, см., например, [1,2]. Быстро развиваются различные численные методы решения таких задач, особенно разностные. В работе [3] за счет идеи линейной интерполяции и экстраполяции продолжением были построены эффективные численные методы для решения уравнения диффузии с запаздыванием общего вида, затем эти методы были перенесены на другие уравнения [4].

Однако, в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием, пока нет таких универсальных алгоритмов, которые могли бы быть положены в основу пакетов прикладных программ для решения подобных задач. На наш взгляд, одной из причин этого является отсутствие процедур автоматического выбора шагов по времени и пространству, используя заданную точность. В данной работе предлагается процедура экстраполяции Ричардсона, которая не только позволяет построить новый метод порядка $h^4+\Delta^4$ на основе базового метода порядка $h^2+\Delta^2$, но и применять процедуру Рунге практической оценки погрешности, что в перспективе может быть использовано для организации методов с автоматическим выбором шага. Основной результат состоит в обосновании порядка асимптотического разложения глобальной погрешности для базового метода Кранка-

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект № 22-21-00075

Николсон с кусочно-кубической интерполяцией для решения уравнения диффузии с функциональным запаздыванием.

1. Постановка задачи и базовый метод

Рассмотрим одномерное по пространству уравнение параболического типа с функциональным эффектом запаздывания (запаздывание может быть сосредоточенным или распределенным)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t,u_t(x,\cdot)),$$

здесь $x \in [0,X]$ — пространственная и $t \in [0,T]$ — временная независимые переменные; $u(x,t)$ — искомая функция; $u_t(x,\cdot) = \{u(x,t+s), -\tau \le s \le 0\}$ — функция-предыстория искомой функции к моменту t, $\tau > 0$ — величина запаздывания. Пусть заданы:

начальные условия $u(x,s) = \varphi(x,s)$ при $x \in [0,X]$, $s \in [-\tau,0]$;

граничные условия $u(0,t) = u(X,t) = 0$ при $t \in (0,T]$.

Будем предполагать, что функция $\varphi(x,s)$ и функционал $f(x,t,u_t(x,\cdot))$ таковы, что эта задача имеет единственное достаточно гладкое решение.

Введем шаг по времени $\Delta = \tau / M_0$ и пусть $M = T/\Delta$. Введем точки $t_j = j\Delta, \quad j = -M_0, \ldots, M$. Полуцелые точки будем обозначать $t_{j+1/2} = t_j + \Delta/2$. Введем шаг по пространству $h = X/N$ и введем точки $x^i = ih, \ i = 0, \ldots, N$. Аппроксимацию функции $u(x_i,t_j)$ будем обозначать U_j^i.

При всяком фиксированном $i = 0, \ldots, N$ введем дискретную предысторию к моменту t_j: $\{U_k^i\}_j = \{U_k^i, j - M_0 \le k \le j\}$. Оператором интерполяции с экстраполяцией назовем отображение множества $\{U_k^i\}_j$ во множество функций, определенных на $t \in [t_j - \tau, t_{j+1/2}]$. В работах [3, 4] для построения численных алгоритмов использовалась кусочно-линейная интерполяция, которая имеет второй порядок интерполяции [5] и, следовательно, делает ограничения на порядок сходимости метода по шагу времени Δ, который не может быть выше второго. В данной работе в дальнейшем будем использовать кусочно-кубическую интерполяцию с экстраполяцией продолжением, которая имеет [5] четвертый порядок интерполяции.

Методом Кранка-Николсон (базовым методом) назовем неявную схему

$$\frac{U_{j+1}^i - U_j^i}{\Delta} = \frac{U_{j+1}^{i-1} - 2U_{j+1}^i + U_{j+1}^i}{2h^2} + \frac{U_j^{i-1} - 2U_j^i + U_j^i}{2h^2} + f(x_i, t_{j+1/2}, (U_j^i)_{t_{j+1/2}}(\cdot)),$$

где $(U_j^i)_{t_{j+1/2}}(\cdot)$ - результат действия оператора кусочно-кубической интерполяции с экстраполяцией продолжением. Дополним также метод соответствующими начальными и граничными условиями. Как следует из работ [3,4], метод сходится с порядком $h^2 + \Delta^2$.

2. Основные результаты

Обозначим погрешность метода через $\varepsilon_j^i = u(x_i,t_j) - U_j^i$. В дальнейшем будем предполагать, что шаги разбиения по времени и пространству согласованы: $h = \sigma\Delta$.

Теорема 1. Погрешность метода представима в виде $\varepsilon_j^i = e(x_i,t_j)\Delta^2 + O(\Delta^4)$, где функция $e(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial e(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 e(x,t)}{\partial x^2} + \langle G, e_t(x,\cdot)\rangle - \gamma(x,t),$$

с нулевыми начальными и граничными условиями. Здесь G — производная Фреше функционала $f(x,t,u_t(x,\cdot))$ по последнему аргументу в пространстве непрерывных функций, $\langle G, e_t(x,\cdot)\rangle$ — результат действия G на предысторию функции $e_t(x,\cdot)$, функция $\gamma(x,t)$ выражается через частные производные до четвертого порядка точного решения $u(x,t)$.

Пусть $U_j^i(h,\Delta)$ — результат базового метода Кранка-Николсон с кусочно-кубической интерполяцией и экстраполяцией продолжением, с шагом по пространству h и с шагом по времени Δ. Сконструируем экстраполяционный метод Ричардсона

$$(U_E)_j^i = \frac{4}{3}U_j^i(\tfrac{h}{2},\tfrac{\Delta}{2}) - \frac{1}{3}U_j^i(h,\Delta).$$

Теорема 2. Метод $(U_E)_j^i$ имеет порядок сходимости $h^4 + \Delta^4$.

Теорема 3. Для погрешности $\varepsilon_j^i = \varepsilon_j^i(h,\Delta)$ базового метода Кранка-Николсон с кусочно-кубической интерполяцией и экстраполяцией продолжением справедливы формулы Рунге

$$\varepsilon_j^i(h,\Delta) = \frac{4}{3}(U_j^i(\tfrac{h}{2},\tfrac{\Delta}{2}) - U_j^i(h,\Delta)) + O(\Delta^4),$$

$$\varepsilon_j^i(\frac{h}{2},\frac{\Delta}{2}) = \frac{1}{3}(U_j^i(\tfrac{h}{2},\tfrac{\Delta}{2}) - U_j^i(h,\Delta)) + O(\Delta^4).$$

Формулы Рунге могут быть использованы для организации вычислений с переменным шагом, определяемым заданной точностью.

Заключение

Таким образом, с помощью асимптотического разложения глобальной погрешности для базового численного метода решения уравнения диффузии с запаздывание построен экстраполяционный метод более высокого порядка. Численные эксперименты на тестовых примерах, содержащих постоянное, переменное и распределенное запаздывание, проведенные Андреем Борисовичем Ложниковым, подтвердили теоретические результаты.

Библиография

1. *Wu J.* Theory and Application of Partial Functional Differential Equations. N.Y.: Springer-Verlag, 1996. – 438 p.
2. *Polyanin A., Sorokin V., Zhurov A.* Delay Ordinary and Partial Differential Equations. Boca Raton: CRC Press, 2023. – 400 p.
3. *Пименов В.Г., Ложников А.Б.* Разностные схемы численного решения уравнения теплопроводности с последействием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. – Т.17, №1. – С. 178-189.
4. *Пименов В.Г.* Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью. Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2014. – 134 с.
5. *Ким А.В., Пименов В.Г.* i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. Ижевск: РХД, 2004. – 256 с.

Bibliography

1. *Wu J.* Theory and Application of Partial Functional Differential Equations. N.Y.: Springer-Verlag, 1996. – 438 p.
2. *Polyanin A., Sorokin V., Zhurov A.* Delay Ordinary and Partial Differential Equations. Boca Raton: CRC Press, 2023. – 400 p.
3. *Pimenov V.G., Lozhnikov A.B.* Difference schemes for the numerical solution of the heat conduction equation with aftereffect. // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2011. – Vol. 275, S1. – P. 137-148.
4. *Pimenov V.G.* Raznostnyye metody resheniya uravneniy v chastnykh proizvodnykh s nasledstvennost'yu [Difference methods for solving partial differential equations with heredity]. Ekaterinburg, Publishing House of Ural University, 2014. – 134 p.
5. *Kim A.V., Pimenov V.G.* i-Gladkiy analiz i chislennyye metody resheniya funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy [i-Smooth analysis and numerical methods for solving functional differential equations]. Izhevsk, RC Dynamics Publ., 2004. – 256 p.

УДК 378.147:004

DOI 10.53980/9785907599970_180

ФОРМИРОВАНИЕ ИНЖЕНЕРНОГО МЫШЛЕНИЯ ПОСРЕДСТВОМ РЕШЕНИЯ ПРОФИЛЬНЫХ ЗАДАЧ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Рожкова С.В.*, **, Беляускене Е.А.*, Имас О.Н.*, Устинова И.Г.*, Янущик О.В.*, ***

** Национальный исследовательский Томский политехнический университет,*
Россия, Томск, igu@tpu.ru, yanuschik@tpu.ru, eam@tpu.ru, onm@tpu.ru, rozhkova@tpu.ru
***Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, Томск, rozhkova@tpu.ru*
**** Томский государственный университет систем управления и радио-электроники, Россия, Томск, yanuschik@tpu.ru*

В статье предложена модель трансформации образовательного процесса, направленная на формирование у студентов инженерного мышления путем интеграции содержания дисциплины математика с задачами специализации.

Ключевые слова: *трансформация, методика, математика.*

FORMATION OF ENGINEERING THINKING BY SOLVING SPECIALIZED PROBLEMS IN THE COURSE OF MATHEMATICS

Rozhkova S.V.*, *, Beliauskene E.A.*, Imas O.N.*, Ustinova I.G.*, Yanuschik O.V.*, ****

** National Research Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk,*
igu@tpu.ru, yanuschik@tpu.ru, eam@tpu.ru, onm@tpu.ru, rozhkova@tpu.ru
*** National Research Tomsk State University, Russia, Tomsk, rozhkova@tpu.ru*
**** Tomsk state university of control system and radio electronics, Russia, Tomsk, yanuschik@tpu.ru*

The article proposes a model of transformation of the educational process aimed at the formation of engineering thinking among students by integrating the content of the discipline mathematics with the tasks of specialization.

Key words*: transformation, methodology, mathematics.*

Профессия инженера сочетает в себе два противоположных аспекта: фундаментальное знание базовых наук и развитое наглядно-образное мышление. В отличие от учёного, изучающего уже существующие в природе объекты и явления, инженер создаёт новые устройства и технологические процессы или совершенствует имеющиеся. Для успешного осуществления своей профессиональной деятельности инженер должен обладать особым складом ума, так называемым инженерным мышлением. Этот особый вид мышления проявляется и формируется при изучении различных проблемных ситуаций – задач, характеризующихся неполными начальными данными и несколькими возможными способами решения. В этом контексте инженерное мышление и способность к творческой деятельности рассматриваются нами как цели и результаты обучения. При этом особую актуальность приобретает проблема развития у студентов научной грамотности, исследовательских умений и навыков. Работы многих ученых подтверждают мнение о том, что развитие инженерного мышления возможно при интеграции инженерных и математических дисциплин [1].

Анализ теории и практики формирования инженерного мышления у учащихся в вузе показал существование противоречия между необходимостью развития инженерного мышления у будущих бакалавров и недостаточной разработанностью педагогических условий, обеспечивающих решение этой задачи в процессе обучения математике [2]. Отметим, что в настоящее время разработано несколько основных подходов к формированию инженерного мышления у учащихся в учебном процессе высшего профессионального образования. Многие авторы отмечают важную роль интеграции математики и инженерных дисциплин в процессе формирования инженерного мышления и предлагают использование компьютерных технологий и метод кейсов решения комплексных междисциплинарных задач [3, 4, 5]. Однако, все существующие модели предлагают интеграцию

отдельных дисциплин или их компонентов, тем самым формируя лишь некоторые составляющие инженерного мышления.

В 2022-2023 гг. Школа базовой инженерной подготовки совместно с Инженерной школой энергетики проводит эксперимент по модернизации инженерного образования в Томском политехническом университете. Кластерная модель базового инженерного образования предполагает реализацию индивидуальных траекторий обучения (базовая, углубленная, профессиональная) будущих бакалавров в зависимости от выбранной ими специальности, их уровня подготовки и индивидуальных целей. При этом был использован новый подход к реализации базовой подготовки инженеров, в котором направление подготовки выступает интегратором всех базовых дисциплин (математика, физика, информатика, химия, начертательная геометрия и инженерная графика, основы права, психология и др.), которые в свою очередь нацелены на углубление и уточнение материалов профильных дисциплин. Экспериментом были охвачены 160 студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника и 15 преподавателей, в том числе 3 преподавателя отделения Математики и информатики. Целями эксперимента являются создание эффективной системы базовой инженерной подготовки (1 – 4 семестры) на основе сочетания теоретического обучения с практической инженерной деятельностью и формирование у студентов целостного представления о профессии путем интеграции содержания дисциплин базовой подготовки с задачами будущей профессиональной деятельности. В соответствии с целями эксперимента поставлены следующие задачи:

- установление и закрепление межпредметных связей дисциплин базовой инженерной подготовки с профильными дисциплинами;
- синхронизация содержания дисциплин базовой инженерной подготовки;
- формирование у студентов отношения к дисциплинам базовой подготовки как к инструменту решения прикладных и инженерных задач.

Эксперимент проводится в три этапа:

1. Подготовительный этап (2022 г.) – разработка программы эксперимента и корректировка учебного плана. Результатами реализации этого этапа являются синхронизация дисциплин базовой подготовки, корректировка рабочих программ дисциплин базовой подготовки, более равномерное распределение дисциплин социально-гуманитарного блока по семестрам, разработка совместного понедельного календарного плана для всех дисциплин 1-4 семестров;
2. Основной этап (2022/23 уч. гг.) – разработка профильных задач и кейсов для всех дисциплин базовой инженерной подготовки. Результатами реализации этапа являются методический навигатор по специальности «Введение в энергетику» [6] для студентов и преподавателей, комплект профильных задач и кейсов;
3. Заключительный этап (2023 г.) – разработка модели формирования инженерного мышления и методики проведения лекционных и практических занятий.

В статье описывается реализация эксперимента на примере дисциплины Математика. В соответствии с разработанным совместным календарным планом дисциплин были синхронизированы методические материалы по математике с темами других предметов, а также в рабочие программы 1 и 2 семестров были интегрированы профильные задачи. Специально разработанный «Методический навигатор» играет роль путеводителя будущих инженеров по их специальности и связывает содержание всех базовых дисциплин, в том числе и математики, с задачами различных специализаций электроэнергетики и электротехники. По каждому разделу семестра разработаны 1-2 задачи для иллюстрации применения студентами математических знаний, полученных при изучении определенной темы, в их будущей профессиональной деятельности. Одна из глав навигатора «Введение в энергетику» посвящена принципам разработки математических моделей электроустановок в электроэнергетических системах. Рассматриваются модели, описывающиеся системами линейных уравнений, системами нелинейных алгебраических уравнений, с помощью интегральных уравнений, а также дифференциальными уравнениями. Лекционный материал и практические занятия по дисциплине Математика были адаптированы под профессиональную деятельность, в каждом разделе дисциплины рассматривалась профессиональная задача с использованием математических методов. Например, при изучении раздела Системы линейных уравнений рассматривается устройство под названием «Мост Уитстона», предложенное в 19-м веке английским инженером Чарльзом Уитстоном для точного измерения электрического сопротивления. Студенты составляют и решают систему уравнения в задаче об эффективности работы системы климат-контроля в умном доме. Задачи, подобные примеру с мостом Уитстона, студенты будут решать при изучении дисциплины «Теоретические основы электротехники» в 3-м семестре.

Предложенная модель способствует формированию у студентов направления 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» инженерного мышления и целостного представления о профессиях в сфере энергетики, так как каждая профильная задача предлагается студентам на занятиях по всем дисциплинам базовой подготовки с различных точек зрения. Такой практико-ориентированный и вариативный контент позволит установить прямые связи математики (и других базовых дисциплин) с будущей профессиональной деятельностью и реализовать индивидуальный подход к каждому студенту, регулируя глубину, маршруты и скорость изучения математики.

Библиография

1. *Зуев П.В., Кощеева Е.С.* Роль формального и практического содержания математических дисциплин в формировании инженерного мышления студентов // Педагогическое образование в России. 2016. – № 6. – С. 44−49.

2. *Наумкин Н.И., Шекшаева Н.Н., Квитко С.И., Ломакина М.В., Купряшкин В.Ф., Коровина И.В.* Разработка педагогической модели многоуровневой и поэтапной подготовки студентов к инновационной инженерной деятельности // Интеграция образования. 2019. – Т. 23. – № 4(97). – С. 568−586.

3. *Рожик А.Ю.* Исторические этапы решения проблемы формирования инженерного мышления // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Образование. Педагогические науки. 2017. – Т. 9. – № 2. – С. 98−113.

4. *Карпова Е.В.*, Матвеева Е.П. Роль формального и практического содержания математических дисциплин в формировании инженерного мышления студентов // Педагогическое образование в России. 2016. – № 6. – С. 50−54.

5. *Шепталенко А.В.* Формирование инженерного мышления будущих бакалавров при изучении математики // Актуальные проблемы авиации и космонавтики: Сборник материалов VI Международной научно-практической конференции, посвященной Дню космонавтики. Красноярск: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева". 2020. – С. 957−959.

6. *Шестакова В.В.* Введение в энергетику: методический навигатор. − Томск: Издательство ТПУ, 2022. – 140 с.

Bibliography

1. *Zuev P.V., Kosheeva E.S.* Development of engineering thinking of students in the course of training // Pedagogicheskoe obrazovanie v Rossii [Pedagogical education in Russia]. 2016. – No. 6. – P. 44−49.

2. *Naumkin N.I., Shekshaeva N.N., Kvitko S.I., Lomatkina M.V., Kupryashkin V.F., Korovina I.V.* Designing the Teaching Model of Multilevel Gradual Training of Students in Innovative Engineering // Integration of Education. 2019. – Vol. 23, No. 4(97). – P. 568−586.

3. *Rozhik A.Ju.* Historical Stages of Engineering Thinking Formation // Bulletin of the South Ural State University. Ser. Education. Educational Sciences. 2017. Vol. 9, No. 2. P. 98–113.

4. *Karpova E.V., Matveeva E.P.* The role of the formal and practical content of mathematical subjects in the formation engineering thinking of students // Pedagogicheskoe obrazovanie v Rossii [Pedagogical education in Russia]. 2016. – No. 6. – P. 50−54.

5. *Sheptalenko A.V.* Formation of engineering thinking of future bachelors in the study of mathematics // Actual problems of aviation and cosmonautics: A collection of materials of the VI International Scientific and Practical Conference dedicated to the Day of Cosmonautics. Krasnoyarsk: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Siberian State University of Science and Technology named after Academician M.F. Reshetnev", 2020. – P. 957−959.

6. *Shestakova V.V.* Introduction to energy: methodical navigator. – Tomsk: TSPU Publishing House, 2022. – 140 p.

УДК 37.02

DOI 10.53980/9785907599970_183

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ ВНЕДРЕНИЯ ФГОС НОВОГО ПОКОЛЕНИЯ

Рыгзынова М.В., Петрова С.С.
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,
Россия, Улан-Удэ, maryna8@mail.ru

В данной статье рассмотрены некоторые проблемы математического образования в условиях внедрения ФГОС нового поколения, такие как нехватка педагогических кадров; несформированность единой системы оценки метапредметных и личностных результатов; низкая мотивация к обучению математике в школе.

Ключевые слова: *проблемы математического образования, ФГОС нового поколения.*

CURRENT PROBLEMS OF MATHEMATICS EDUCATION IN THE CONDITIONS OF INTRODUCTION OF FSES (Federal State Educational Standard) OF NEW GENERATION

M.V. Rygzynova, S.S. Petrova
East Siberia State University of Technology and Management
Russia, Ulan-Ude, maryna8@mail.ru

This article discusses some problems of mathematics education in the conditions of introduction of FSES of new generation, such as lack of teachers; immature single system of assessment of metasubject and personal results; low motivation to learn mathematics at school.

Keywords*: problems of mathematical education, FSES of new generation.*

Для реализации национальной образовательной инициативы "Наша новая школа" необходима качественная профессиональная подготовка учителя. С 1 сентября 2011 года во всех первых классах российских школ началась реализация федерального государственного образовательного стандарта (ФГОС) нового поколения. Перед образовательными учреждениями встала задача подготовки учителей к деятельности в рамках нового стандарта.

Для опытных педагогов появилась необходимость изменить сложившуюся систему работы. Но поскольку эта система у успешных педагогов складывалась в течение многих лет и приносила при этом хорошие плоды, то встает вопрос – для чего ее менять? Задачи поставлены новые, а как их решать - не сказано. Отсюда вытекает первая проблема внедрения ФГОС нового поколения – нехватка молодых перспективных педагогических кадров, получивших профессиональное образование ориентированное на новый ФГОС. У молодых специалистов еще не сложились стереотипы, которые трудно разрушать. Они более гибки и восприимчивы к изменениям современного мира. Однако нестабильная ситуация в экономике, низкая заработная плата в системе образования отталкивают молодых одаренных выпускников педагогических ВУЗов от работы в школе.

Для исправления этой ситуации кроме повышения заработной платы молодым специалистам необходима социальная поддержка, такая как единовременные выплаты, обеспечение жильем и т.д. Тогда профессия учителя станет престижной, и в школах появится конкурсный отбор на эту должность. Директор образовательного учреждения получит возможность выбирать наилучших кандидатов.

Стандарт включает в себя требования:

к результатам освоения основной образовательной программы основного общего образования;

к структуре основной образовательной программы основного общего образования, в том числе требования к соотношению частей основной образовательной программы и их объёму, а также к соотношению обязательной части основной образовательной программы и части, формируемой участниками образовательного процесса;

к условиям реализации основной образовательной программы основного общего образования, в том числе к кадровым, финансовым, материально-техническим и иным условиям. [1]

Требования к результатам освоения основной образовательной программы делятся на:

1) личностные
- готовность и способность к саморазвитию;
- мотивация к обучению и познанию;
- ценностно-смысловые установки;
- социальные компетенции, личностные качества;

2) метапредметные - универсальные учебные действия:
- познавательные;
- регулятивные;
- коммуникативные;

3) предметные
- опыт деятельности специфической для данной предметной области;
- система основополагающих элементов научного знания.

Здесь выявляется другая проблема внедрения ФГОС нового поколения, которая состоит в несформированности единой система оценки метапредметных и личностных результатов.

Определенный материал на сегодняшний день, конечно, накоплен. Разработкой диагностических работ занимаются различные организации. В частности, в г.Улан-Удэ диагностику метапредметных результатов школьников проводит Центр оценки качества образования. Результаты такой диагностики получены, но нет их интерпретации, доступных и понятных для учителей, учащихся и их родителей. Например, информационная грамотность одного ученика пятого класса равна 48% (по итогам сентябрьского исследования в 2015 году в гимназии №33 г.Улан-Удэ). Что это значит? Достаточно ли развита информационная грамотность у этого ученика? Какова норма для данного возраста? А главное, какие рекомендации можно дать его родителям? Кроме этих исследований в гимназии №33 используется учебно-методическое пособие «Комплексные работы. Методическое пособие для учителей и родителей», авторы С.В. Пинженина, Н.Н. Титаренко, А. А. Никитченко. Удобство состоит в том, что к этим работам имеется электронное сопровождение, которое позволяет увидеть результат каждого ученика в сравнении с общим результатом класса.

Но итоги диагностического исследования можно использовать пока только внутри образовательного учреждения. И сравнить их с городским или республиканским уровнем невозможно.

Личностные результаты проверяются педагогом-психологом при помощи различных тестов, выбранных им самим. Эти результаты оценке не подлежат, а носят только рекомендательный характер.

Таким образом, становится понятно, что должна быть разработана единая для всех образовательных учреждений система диагностики метапредметных и личностных результатов.

Хотелось бы коснуться еще одной, на наш взгляд актуальной на сегодняшний день проблемы математического образования. Как и в прошлые годы мотивация учащихся к приобретению математических знаний остается низкой. Связано это с общественной недооценкой значимости математического образования, а также с избыточностью программных требований по математике и отсутствием конкурентной образовательной среды.

Кроме того, практически, каждый ученик школы в наше время имеет сотовый телефон или планшетный компьютер с выходом в Интернет, позволяющие, не напрягаясь, выполнять любые вычисления: арифметические, тригонометрические, даже решать уравнения и вычислять интегралы и многое другое. Спрашивается, для чего учить таблицу умножения, изучать действия столбиком, запоминать формулы, учиться строить графики функций и прочее? Для всего этого достаточно применить соответствующую компьютерную программу, ввести данные, и все будет сделано. Мы провели опрос учителей естественно-математических предметов и учащихся девятых классов в гимназии, в котором участвовало 12 человек учителей и 94 девятиклассника. Вопросы были заданы такие:

1. Считаете ли Вы необходимым знать таблицу умножения школьнику старших классов?
2. Считаете ли Вы необходимым уметь делать арифметические вычисления столбиком школьнику старших классов?
3. Считаете ли Вы необходимым уметь строить и читать графики функций школьнику старших классов?

Все без исключения учителя ответили «да» на все вопросы. Однако же на эти же вопросы

девятиклассники ответили так: утвердительно ответили на первый вопрос около половины учащихся, на второй вопрос – менее половины учащихся, на третий – чуть более половины учащихся. Хотя ФГОС однозначно отвечает на это противоречие: «Предметные результаты изучения предметной области "Математика и информатика" должны отражать: овладение навыками устных, письменных вычислений; овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей».

Проблема низкой мотивации к обучению и слабой математической подготовки старших школьников, будущих абитуриентов, еще будет остро стоять ближайшие пять-шесть лет, пока не появится конкуренция при поступлении в технические ВУЗы, когда окончат школу нынешние ученики 4-5 классов, родившиеся в период демографического роста в России. До тех пор особенно необходимо искать и использовать в обучении математике методические приемы, практические задачи, разные формы деятельности, передовой педагогический опыт, которые будут способствовать повышению интереса к предмету и росту мотивации. Профильное обучение следует начинать не в десятом классе, а раньше, в седьмом-восьмом. Индивидуальную образовательную траекторию необходимо выстраивать с учетом способностей и интересов учащегося. Конечно же, нужно проводить разъяснительную работу с учениками и их родителями.

Библиография

1. Приказ Минобрнауки России от 17 декабря 2010 г. № 1897 об утверждении Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования.
2. *Ященко И.В., Семенов А.В., Высоцкий И.Р.* Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2015 года по математике Материалы сайта «ФИПИ» [электронный ресурс]. – URL: http://www.fipi.ru/sites/default/files/document/1441039556/matematika.pdf. –
3. *Соколова Е.С.* «ФГОС. Актуальные проблемы введения» Материалы сайта «Социальная сеть работников образования» [электронный ресурс]. – URL: http://nsportal.ru/nachalnaya-shkola/materialy-mo/2015/06/10/fgos-aktualnye-problemy-vvedeniya.

Bibliography

1. Order of the Ministry of education and science of 17 December 2010 No. 1897 on the approval of Federal state educational standard of basic General education.
2. *I. V. Yashchenko, V. A. Semenov, I. R. Vysotsky.* Methodical recommendations for teachers, based on the analysis of typical errors of students in 2015 in mathematics The materials of the website "FIPI" [electronic resource]. – URL: http://www.fipi.ru/sites/default/files/document /1441039556/ matematika.pdf.
3. *Sokolova E .With*. "FSES. Actual problems of introduction" The materials of the website "Social network of educators" [electronic resource]. – URL: http://nsportal.ru/nachalnaya-shkola/materialy-mo/2015/06/10/fgos-aktualnye-problemy-vvedeniya. –.

УДК 517.957

DOI 10.53980/9785907599970_186

О ТОЧНЫХ МНОГОМЕРНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ[1]

Семенов Э.И.*, Косов А.А.*
**Институт динамики систем и теории управления имени В.М.Матросова Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск, Россия*
e-mail: kosov_idstu@mail.ru

Изучается система двух уравнений в частных производных эллиптического типа со степенными нелинейностями и степенными взаимосвязями. Рассматривается задача построения точных многомерных решений. Предложена конструкция, позволяющая строить радиально симметричные и анизотропные многомерные решения. Рассматриваемые системы уравнений встречаются при моделировании движения формаций с распределенными характеристиками, процессов тепломассопереноса, аналогах модели Тьюринга в биологии и в ряде других приложений.

Ключевые слова: *система эллиптического типа, точные решения, моделирование формаций.*

ON EXACT MULTIDIMENSIONAL SOLUTIONS OF A NONLINEAR SYSTEMS OF ELLIPTIC EQUATIONS WITH POWER NONLINEARITY

Semenov E.I.*, Kosov A.A.*
**Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia*
e-mail: kosov_idstu@mail.ru

A system of two partial differential equations of elliptic type with power nonlinearities and power relationships is studied. The problem of constructing exact multidimensional solutions is considered. A construction is proposed that makes it possible to construct radially symmetric and anisotropic multidimensional solutions. The systems of equations under consideration are encountered in modeling the motion of formations with distributed characteristics, heat and mass transfer processes, analogues of the Turing model in biology, and in a number of other applications.

Keywords: elliptical type system, exact solutions, modeling of formations.

1. Введение.

Ранее авторами была предложена [1] математическая модель процесса распространения двух взаимодействующих распределенных формаций роботов с некоторой базы в окружающее пространство, описываемая системой двух уравнений параболического типа

$$u_t = \nabla \cdot \left(u^{\lambda} \nabla u\right) + a u^{1-\lambda} v^{\mu} - cu, v_t = \nabla \cdot (v^{\mu} \nabla \mathrm{v}) + b v^{1-\mu} u^{\lambda} - dv \qquad (1)$$

Здесь $t \geq 0$, $x \in R^n$, ∇ - оператор градиента по x, λ и μ – параметры нелинейности среды, a, b, c, d – числовые коэффициенты, отражающие характер взаимодействия и амортизацию, $u(t,x)$ и $v(t,x)$ – искомые функции, значения которых представляют плотности формаций в каждый момент времени в каждой точке пространства. Отметим, что подобные распределенные модели в последнее время начали использоваться в роевой робототехнике, и как отмечается в обзоре [2], одна из основных проблем на этом новом направлении состоит в трудности задачи построения точных решений.

С течением времени плотности формаций, удовлетворяющие системе (1), могут стабилизироваться на стационарных решениях $u(x)$ и $v(x)$, которые удовлетворяют системе

$$0 = \nabla \cdot \left(u^{\lambda} \nabla u\right) + a u^{1-\lambda} v^{\mu} - cu, 0 = \nabla \cdot (v^{\mu} \nabla \mathrm{v}) + b v^{1-\mu} u^{\lambda} - dv \qquad (2)$$

Далее будем считать $\lambda \neq -1, \mu \neq -1$ и заменой $U = u^{1+\lambda}$, $V = v^{1+\mu}$ приведем (2) к виду

$$\Delta U = U^{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}} \left(\alpha U^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} + \gamma V^{\frac{\mu}{1+\mu}}\right), \Delta V = V^{\frac{1-\mu}{1+\mu}} \left(\delta U^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} + \beta V^{\frac{\mu}{1+\mu}}\right) \qquad (3)$$

В случае, когда рассматривается только одна формация, система (3) сведется к одному уравнению

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ, проект № 22-29-00819.

$$\Delta U = \alpha U^{\frac{1}{1+\lambda}} \quad (4)$$

В докладе будут представлены точные решения системы (3) и уравнения (4).

Актуальность построения точных многомерных решений нелинейных уравнений (1)-(4) обусловлена также и широким спектром приложений указанных уравнений и систем в различных областях механики, физики, биологии, химической кинетики и т.д. Система типа реакции-диффузии, сходная с (1), была предложена А.Тьюрингом для описания процесса формирования паттернов в биологии [3]. Уравнение (4) можно рассматривать как стационарный аналог уравнения Фуджиты [4], которое встречается в теории горения. Это же уравнение (4) встречается в астрофизике (уравнение Эмдена-Фаулера [5] или уравнение Лейна-Эмдена [6]). Системы уравнений типа (1) или более общие широко используются в задачах тепломассопереноса, химической кинетики, биологии при описании многокомпонентных взаимодействующих сплошных сред, и разработка методов построения точных решений для таких сложных для исследования объектов является актуальной задачей [7].

2. Точные решения уравнения (4)

Утверждение 1. *Если* $\lambda = -\frac{4}{m+2}$, *где* $m \neq 2$ *есть натуральное число, удовлетворяющее условиям* $1 \leq m \leq n$, *то уравнение* (4) *имеет точное многомерное решение*

$$U(x) = \left[\frac{\nu}{2}(Sx)^T E_m S x + B^T x + \frac{1}{2\nu}\|B\|^2 - \frac{2\alpha}{\nu m(m-2)}\right]^{1-\frac{m}{2}} \quad (5)$$

Здесь E_m – диагональная матрица, у которой на главной диагонали в произвольном порядке расположены m единиц и $n-m$ нулей, S – произвольная ортогональная матрица, B – вектор, удовлетворяющий линейной системе $S^T E_{n-m} S B = 0$, ν – произвольный ненулевой параметр.

Следствие. Эллиптическое уравнение $\Delta U = \alpha U^{\frac{n+2}{n-2}}$ имеет точное многомерное решение

$$U(x) = \left[\frac{\nu}{2}\|x\|^2 + B^T x + \frac{1}{2\nu}\|B\|^2 - \frac{2\alpha}{\nu n(n-2)}\right]^{1-\frac{n}{2}},$$

где B и ν - произвольные вектор и число соответственно.

3. Точные решения системы (3)

Утверждение 2. *Если параметры удовлетворяют условиям* $\lambda \neq -1,\ \lambda \neq 0,\ \mu \neq -1,\ \mu \neq 0$, *то система нелинейных эллиптических уравнений* (3) *имеет точное радиально симметричное решение*

$$U(x) = \left[\frac{\nu}{2}\|x\|^2\right]^{\frac{1+\lambda}{\lambda}},$$

$$V(x) = \left[\frac{\nu}{2\gamma}\left(\frac{\nu(1+\lambda)(n\lambda+2)}{\lambda^2} - \alpha\right)\|x\|^2\right]^{\frac{1+\mu}{\mu}} \quad (6)$$

где постоянная ν *удовлетворяет неравенству* $\nu(1+\lambda)(n\lambda+2) - \alpha\lambda^2 \neq 0$ *и является корнем кубического уравнения*

$$\frac{(1+\lambda)^2}{\gamma^2\lambda^2}\left(n+\frac{2}{\lambda}\right)^2\left(n+\frac{2}{\mu}\right)\nu^3 - \frac{2\alpha(1+\lambda)}{\gamma^2\lambda}\left(n+\frac{2}{\lambda}\right)\left(n+\frac{2}{\mu}\right)\nu^2 +$$
$$\left(+\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\left(n+\frac{2}{\mu}\right) - \frac{\beta\mu(1+\lambda)}{\gamma\lambda(1+\mu)}\left(n+\frac{2}{\lambda}\right)\right)\nu + \frac{\delta\mu}{1+\mu}\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta} - 1\right) = 0.$$

Был разработан способ построения анизотропных точных решений, общие формулы для которого здесь приводить не будем ввиду их громоздкости. Приведем только один пример такого анизотропного решения в трехмерном пространстве.

Пример 1. В качестве частного случая системы (3) в трехмерном пространстве рассмотрим систему уравнений эллиптического типа

$$\Delta U = 3U^{\frac{2}{3}} + 24U^{\frac{1}{3}}V^{\frac{1}{5}},\ \Delta V = 315V^{\frac{4}{5}} - 240U^{\frac{1}{3}}V^{\frac{3}{5}}$$

Эта система имеет точное анизотропное решение

$$U(x) = \left(\frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^3,\ V(x) = \left(\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2\right)^5$$

В докладе будет представлен ряд примеров построенных точных решений систем вида (3). Такого рода примеры могут использоваться для верификации и настройки численных методов и программных комплексов, предназначенных для приближенного построения решений в прикладных задачах.

Библиография

1. *Kosov A.A., Semenov E.I.* Distributed model of space exploration by two types of interacting robots and its exact solutions // Journal of Physics: Conference Series: 2020 Dynamic Systems and Computer Science: Theory and Applications (DYSC 2020, 19-22 October 2020). 2021. Vol. 1847, №1 doi: 10.1088/1742-6596/1847/1/012007.

2. *Karthik Elamvazhuthi and Spring Berman*. Mean-field models in swarm robotics: a survey // Bioinspiration & Biomimetics, 2019. Vol. 15, Number 1. 15 015001. doi: 10.1088/1748-3190/ab49a4.

3. *Turing A.M.* The chemical basis of morphogenesis // Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1952. Vol. 237. P. 37–72.

4. *Fujita H*. On the blowing up of solutions of the Cauchy problrm for ut = _u + u1+_ // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. I. 1966. Vol. 13. _ P. 109–124.

5. *Bohmer C.G. Harko T.* Nonlinear stability analysis of the Emden-Fowler equation // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 2010. V. 17. P. 503–516.

6. *Horedt G.P.* Topology of the Lane-Emden equation // Astronomy and Astrophysics. 1987. V. 117, no. 1–2. P. 117–130.

7. *Polyanin A.D., Kutepov A.M., Vyazmin A.V., Kazenin D.A.* Hydrodynamics, Mass and Heat Transfer in Chemical Engineering. London and N.Y.: Taylor & Francis, 2002. 387 p.

Bibliography

1. *Kosov A.A., Semenov E.I.* Distributed model of space exploration by two types of interacting robots and its exact solutions // Journal of Physics: Conference Series: 2020 Dynamic Systems and Computer Science: Theory and Applications (DYSC 2020, 19-22 October 2020). 2021. Vol. 1847, №1 doi: 10.1088/1742-6596/1847/1/012007.

2. *Karthik Elamvazhuthi and Spring Berman*. Mean-field models in swarm robotics: a survey // Bioinspiration & Biomimetics, 2019. Vol. 15, Number 1. 15 015001. doi: 10.1088/1748-3190/ab49a4.

3. *Turing A.M.* The chemical basis of morphogenesis // Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1952. Vol. 237. P. 37–72.

4. *Fujita H*. On the blowing up of solutions of the Cauchy problrm for ut = _u + u1+_ // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. I. 1966. Vol. 13. _ P. 109–124.

5. *Bohmer C.G. Harko T.* Nonlinear stability analysis of the Emden-Fowler equation // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 2010. V. 17. P. 503–516.

6. *Horedt G.P.* Topology of the Lane-Emden equation // Astronomy and Astrophysics. 1987. V. 117, no. 1–2. P. 117–130.

7. *Polyanin A.D., Kutepov A.M., Vyazmin A.V., Kazenin D.A.* Hydrodynamics, Mass and Heat Transfer in Chemical Engineering. LondonandN.Y.: Taylor&Francis, 2002. 387 p.

УДК 519.63, 532.135

DOI 10.53980/9785907599970_189

О РАЗРУШЕНИИ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ ТИПА ПУАЗЕЙЛЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ*

Семисалов Б.В.*, *, Шапеев В.П.**, *****

**Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия, Новосибирск*

***Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН Россия, Новосибирск*

****Новосибирский национальный исследовательский университет, Россия, Новосибирск*

vibis@ngs.ru, shapeev.vasily@mail.ru

На основе реологической мезоскопической модели Покровского–Виноградова получены уравнения, описывающие течения несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости в цилиндрическом канале. Найдены точные решения уравнений для стационарного случая и проведено моделирование установления течений. Исследованы условия существования и устойчивости стационарных течений. Полученные результаты позволяют конструктивно описать процесс разрушения ламинарного течения типа Пуазейля. Ключевую роль в этом процессе с точки зрения механики играют размер и ориентация макромолекул полимерной жидкости, с точки зрения математики – особые точки решений.

Ключевые слова: *течения полимерной жидкости, цилиндрический канал, мезоскопическая реологическая модель, точные стационарные решения, особые точки, расчёт установления течения.*

ON A DESTRUCTION OF LAMINAR POISEUILLE-TYPE FLOW OF POLYMER FLUID IN A CIRCULAR PIPE

Semisalov B.V*, *, Shapeev V.P. **, *****

**Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Russia, Novosibirsk*

***Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Russia, Novosibirsk*

****Novosibirsk State University, Russia, Novosibirsk*

vibis@ngs.ru, shapeev.vasily@mail.ru

On the basis of rheological mesoscopic Pokrovskii–Vinogradov model, we derive equations that describe the flow of an incompressible viscoelastic polymer fluid in a circular pipe. Exact solutions of the equations for the stationary case are obtained and simulation of stabilizing flows is performed. The conditions for the existence and stability of stationary flows are studied. The obtained results enable one to describe constructively the process of destruction of laminar Poiseuille-type flows. The key role in mechanics of this process is played by the size and orientation of the macromolecules of the polymer fluid. Mathematical description of the process uses essentially the solutions' singular points.

Key words*: polymer fluid flows, cylindrical channel, rheological mesoscopic model, exact stationary solutions, singular points, numerical simulation of stabilization of flow.*

Введение

Ламинарно-турбулентный переход в течениях вязкоупругой полимерной жидкости с прямыми линиями тока качественно отличается от случая течений классической вязкой жидкости. Математическое описание такого перехода представляет большую проблему, окончательного решения которой до сих пор предложено не было (по этому поводу см. обзор [1]). В работе выведена мезоскопическая модель течения полимерной жидкости в цилиндрическом канале и предложен новый подход к описанию разрушения таких течений на основе анализа особых точек решений уравнений модели.

Следуя [2], приведём уравнения, описывающие движение несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости, в безразмерной форме в Декартовой системе координат:

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (СОГЛАШЕНИЕ № 23-21-00499).

$$\operatorname{div}\mathbf{u}=0,\qquad \frac{d\mathbf{u}}{dt}+\nabla P=\operatorname{div}\Pi,\qquad \frac{1}{\mathrm{W}}\Pi+\overset{\triangledown}{\Pi}=\frac{2}{\mathrm{W}\,\mathrm{Re}}\mathrm{D}-\left(\mathrm{Re}\frac{k-\beta}{3}(\operatorname{tr}\Pi)\Pi+\beta\mathrm{Re}\,\Pi^2\right),\qquad (1)$$

где t – время; $\mathbf{u}$ – вектор скорости в Декартовой системе координат x, y, z; P – давление; $\Pi=(a_{ij})$ – симметрический тензор анизотропии второго ранга; $I=\operatorname{tr}\Pi$ – след тензора анизотропии (скаляр); Π^2 вычисляется по правилу возведения матрицы в квадрат;

$\mathrm{D}=(\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})^T)/2$ – тензор скоростей деформации;

$d/dt=\partial/\partial t+\mathbf{u}\cdot\nabla$ – материальная (субстанциональная) производная по времени, где оператор ∇ нужно понимать как ковариантную производную от векторного или тензорного поля;

$\overset{\triangledown}{\Pi}=d\Pi/dt-[(\nabla\mathbf{u})^T\Pi+\Pi(\nabla\mathbf{u})]$ – так называемая верхняя конвективная производная по времени от тензора Π, причём каждое слагаемое в квадратных скобках вычисляется по формулам умножения матрицы на матрицу;

k, β $(0\le\beta\le1)$ – феноменологические параметры модели, характеризующие вклады, связанные с анизотропией (величина β учитывает ориентацию макромолекулярного клубка, число k – его размеры, см. [2]);

$\mathrm{Re}=\rho u_H l/\eta_0^*$ – число Рейнольдса; $\rho(=\text{const})$ – плотность; $\mathrm{W}=\tau_0^* u_H/l$ – число Вайсенберга;

η_0^*, τ_0^* – начальные значения сдвиговой вязкости и времени релаксации (см. [2]), l, u_H – характерные значения размера и скорости.

1. Постановки стационарной и нестационарной задач для течений в цилиндрическом канале

Следуя [3], перейдём в цилиндрическую систему координат (r,φ,z) и поставим для продольной компоненты w вектора $\mathbf{u}$ и для компонент a_{rz},a_{rr},a_{zz} тензора Π с индексами 13, 11, 33 начально-краевую задачу, описывающую нестационарные осесимметричные течения типа Пуазейля (рис. 1):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-A_r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial r}+K_I\left(\frac{\partial w}{\partial t}-P_d(t)\right)+\frac{\mathrm{Re}\beta}{r}\frac{\partial(ra_{rz}(a_{rr}+a_{zz}))}{\partial r}+\frac{\partial K_I}{\partial r}a_{rz}=P_d'(t),\ A_r=a_{rr}+\frac{1}{\mathrm{ReW}},\qquad (2)$$

$$a_{rz}=\frac{1}{r}\int_0^r\frac{\partial w(t,s)}{\partial t}s\,ds-P_d(t)\frac{r}{2},\qquad \frac{\partial a_{rr}}{\partial t}+K_I a_{rr}+\gamma=0,\qquad \frac{\partial a_{zz}}{\partial t}-2a_{rz}\frac{\partial w}{\partial r}+K_I a_{zz}+\theta=0,\qquad (3)$$

$$\partial w/\partial r(t,0)=0,\ \ w(t,1)=0,\ \ t\ge0;\qquad w(0,r)=0,\ \partial w/\partial t(0,r)=0,\ a_{rr}(0,r)=0,\ a_{zz}(0,r)=0,\ r\in[0,1],\qquad (4)$$

где $K_I=\mathrm{W}^{-1}+(\bar{k}\,\mathrm{Re}/3)I$, $\bar{k}=k-\beta$, $\gamma=\beta\mathrm{Re}(a_{rr}^2+a_{rz}^2)$, $\theta=\beta\mathrm{Re}(a_{rz}^2+a_{zz}^2)$, $P_d(t)=-\Delta P(t)/(\rho u_H^2 h)$ – безразмерный градиент давления в канале на отрезке длины hl.

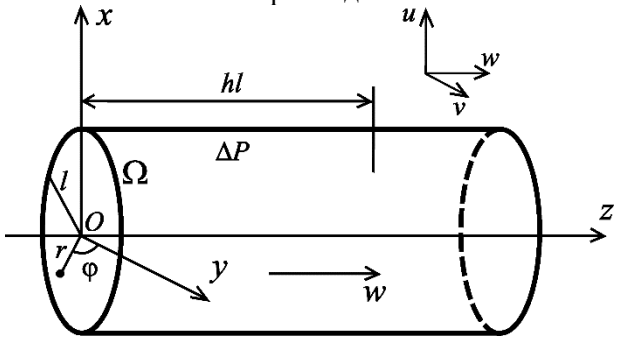


Рисунок 1 – Цилиндрический канал. Декартова и полярная системы координат

В стационарном случае задача (2)–(4) записывается в виде

$$\frac{\partial w}{\partial r}=-\left\{\frac{1}{2\mathrm{W}}+\frac{\beta+\bar{k}/3}{A_r}a_{rr}\left[\frac{1}{\mathrm{W}}\left(1-\frac{1}{\beta}\right)-\frac{2\bar{k}\,\mathrm{Re}}{3\beta}\left(a_{rr}+\frac{P_d^2r^2}{4A_r}\right)\right]\right\}\frac{P_d}{A_r}r,\ \ w(0,r)=0,\qquad (5)$$

$$a_{rz} = -P_d r/2, \quad a_{zz} = a_{rr} + P_d^2 r^2/(2A_r), \quad \mathrm{W}^{-1} a_{rr} + \mathrm{Re}\left(2\bar{k}/3 + \beta\right) a_{rr}^2 + \mathrm{Re}\, P_d^2 r^2 \left(2\bar{k} a_{rr}/(3A_r) + \beta\right)/4 = 0. \quad (6)$$

Далее будем рассматривать режим $k = \beta$ ($\bar{k} = 0$). При этом удаётся найти точное решение (5), (6):

$$a_{rr}(r) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - (\beta\Lambda P_d)^2 r^2}}{2\beta\Lambda}, \quad w(r) = \frac{1}{P_d \beta \Lambda \mathrm{W}} \left\{ \left(8(1-\beta)\beta - 1\right) \log\left|\frac{\theta(r)}{\theta(1)}\right| \pm \hat{\beta}\, \Upsilon(r) \right\} \pm \frac{4\Upsilon(r)\hat{\beta}(\beta - 1)}{P_d \mathrm{W} \Lambda \theta(r)\theta(1)}, \quad (7)$$

где $\Lambda = \mathrm{ReW}$, $\hat{\beta} = 2\beta - 1$, $\theta(r) = \pm\hat{\beta} + \sqrt{1 - (P_d \beta \Lambda)^2 r^2}$, $\Upsilon(r) = \theta(r) - \theta(1)$.

Новый сценарий перехода к турбулентности. Видно, что решения (7) имеют точки ветвления. Наша основная идея состоит в том, что разрушение стационарных течений типа Пуазейля при изменении параметров $P_d, \beta, \mathrm{W}, \mathrm{Re}$ вызвано образованием сдвигового слоя в окрестности границы $r = 1$, когда одна из указанных точек ветвления подходит к границе. При выходе точки на границу решение (7) разрушается, что означает начало сложной дву- или трёхмерной динамики, являющейся предвестником ламинарно-турбулентного перехода.

2. Численная проверка предложенного сценария перехода к турбулентности

Для анализа устойчивости решений (7) на нелинейном уровне (реализуемости соответствующих стационарных течений на практике) необходимы расчёты на установление в нестационарной задаче (2)–(4). Для моделирования установления использован алгоритм из [4], основанный на методе коллокаций, применении интерполяционных полиномов с узлами Чебышёва и быстрой схемы решения задач линейной алгебры. Для любых значений $P_d, \beta, \mathrm{W}, \mathrm{Re}$ алгоритм либо выдаёт стационарное решение, либо, если сходимости нет, вывод о том, что решение не устанавливается. Отметим, что при любых значениях параметров, для которых удалось достичь установления, предельное решение с точностью до пяти–восьми знаков совпадает с ветвью решения (7) со знаком «+», что говорит о корректности проведённых выкладок и расчётов, и устойчивости этого решения.

В расчётах найдены предельные значения числа Re, при переходе через которые решение задачи (2)–(4) перестаёт устанавливаться. На рис. 2 пунктиром изображены зависимости этих значений от W, а сплошными линиями — ограничения, полученные из условий существования решения (7): $\mathrm{Re} \sim 1/W$. Установлено, что в случае $\beta < 0.5$ потеря устойчивости происходит при немного меньших Re, чем разрушение стационарного решения, в случае $\beta > 0.5$ – при тех же Re.

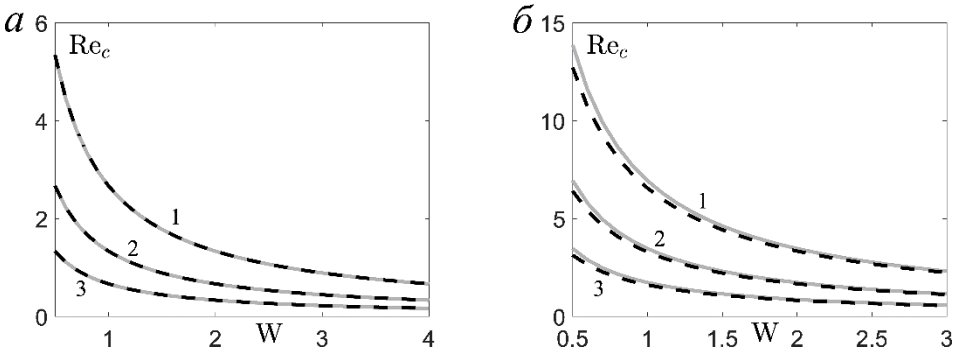


Рисунок 2 – Предельные значения числа Рейнольдса в зависимости от числа Вайсенберга: *а*) $\beta = 0.75$ и случаи $P_d = 0.5$ – линии 1; $P_d = 1$ – линии 2; $P_d = 2$ – линии 3; *б*) $\beta = 0.25$ для тех же значений P_d. Серые сплошные линии соответствуют условиям существования решения (7); пунктирные линии получены при численном анализе установления решений задачи (2)–(4)

В заключение отметим, что обратно пропорциональная зависимость критических значений Re и W может быть получена на основе совсем других принципов. Например, в [5] использована модель Oldroyd-B для поиска перехода к турбулентности в двумерных течениях полимерного раствора. Асимптотика критических значений параметров имеет вид: $\mathrm{Re} \sim (E(1-b))^{-1/2}$, где b – отношение вязкостей растворителя и раствора; E=W/Re – характеристика эластичности (см. рис. 4 из работы [5] и комментарии к нему). Нетрудно видеть, что эта асимптотика соответствует $\mathrm{Re} \sim 1/W$. В указанной работе имеются ссылки на экспериментальные данные, подтверждающие такую асимптотику.

Библиография

1. *Datta S.S. et al.* Perspectives on viscoelastic flow instabilities and elastic turbulence // Phys. Rev. Fluids. 2022. – Vol. 7. Art. № 080701.

2. *Алтухов Ю.А., Гусев А.С., Пышнограй Г.В.* Введение в мезоскопическую теорию текучести полимерных систем. Барнаул: Изд-во АлтГПА, 2012. – 121 с.

3. *Семисалов Б.В.* О точных решениях типа Пуазейля для течений вязкоупругой полимерной жидкости в цилиндрическом канале // ПМТФ. 2022. Препринт. www.elibrary.ru/item.asp?id=50436461.

4. *Блохин А.М., Семисалов Б.В.* Нахождение стационарных течений пуазейлевского типа для несжимаемой полимерной жидкости методом установления // ЖВМиМФ. 2021. – Т. 62, № 2. С. 305–319.

5. *Khalid M., Shankar V., Subramanian G.* A continuous pathway between the elastoinertial and elastic turbulent states in viscoelastic channel flow // Phys. Rev. Lett. 2021. – Vol. 127. Art. № 134502.

Bibliography

1. *Datta S.S. et al.* Perspectives on viscoelastic flow instabilities and elastic turbulence // Phys. Rev. Fluids. 2022. – Vol. 7. Art. № 080701.

2. *Altukhov Yu.A., Gusev A.S., Pyshnograi G.V.* Vvedenie v mezoskopicheskuyu teoriyu tekuchesti polimernyh sistem [Introduction to the mesoscopic theory of polymer systems flow]. Barnaul: Izd-vo AltGPA, 2012. – 121 p.

3. *Semisalov B.V.* Exact Poiseuille-type solutions for the flows of viscoelastic polymer fluid through a circular pipe // J. of Appl. Mech. and Tech. Phys. 2022. Preprint: www.elibrary.ru/item.asp?id=50436461.

4. *Blokhin A.M., Semisalov B.V.* Finding steady Poiseuille-type flows for incompressible polymeric fluids by the relaxation method // Comp. math. and math. phys. 2022. Vol. 62, No. 2. P. 302–315.

5. *Khalid M., Shankar V., Subramanian G.* A continuous pathway between the elastoinertial and elastic turbulent states in viscoelastic channel flow // Phys. Rev. Lett. 2021. – Vol. 127. Art. № 134502.

УДК: 517.977.52

DOI 10.53980/9785907599970_193

ПРИВЕДЕНИЕ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ В ПОЛОЖЕНИЕ УСТОЙЧИВОГО РАВНОВЕСИЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Тарасьев А.М. [1,2], Усова А.А. [1]

[1]*Институт математики и механики УрО РАН имени Н.Н. Красовского*

[2]*Уральский Федеральный Университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина*

tam@imm.uran.ru, ausova@imm.uran.ru

В работе рассматриваются условия стабилизируемости гамильтоновых систем, возникающих в принципе максимума Понтрягина применительно к задачам управления на неограниченном промежутке времени. Основу таким задачам составляют модели роста с логарифмическим показателем качества, используемые для описания процессов развития в некоторых прикладных областях. Доказывается, что в условиях существования изолированной стационарной точки, можно построить такой регулятор гамильтоновой системы, что ее стационарное решение будет асимптотически устойчива по первому приближению.

Ключевые слова: *гамильтоновы системы, устойчивость по первому приближению, нелинейный регулятор, уравнение Риккати.*

BRINGING THE HAMILTONIAN SYSTEM TO A POSITION OF STABLE EQUILIBRIUM IN OPTIMAL ECONOMIC GROWTH PROBLEMS

A.M. Tarasyev [1,2], A.A. Usova [1]

[1]*Institute of Mathematics and Mechanics of the N.N. Krasovsky*

[2] *Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin*

tam@imm.uran.ru, ausova@imm.uran.ru

The paper investigates conditions for the stabilizability of Hamiltonian systems arising in the Pontryagin maximum principle in application to control problems on an infinite time interval. Such problems are based on growth models with logarithmic utility functional that are used to describe development processes in some applied areas. The paper proves that under the conditions of the existence of an isolated steady state, there exists such a controller of the Hamiltonian system that its stationary solution is asymptotically stable in the first approximation.

Keywords: *Hamiltonian systems, stability in the first approximation, nonlinear controller, Riccati equation.*

Введение

В статье изучаются условия стабилизируемости гамильтоновых систем в окрестности изолированной стационарной точки, предлагается конструкция стабилизирующего управления и нелинейной стабилизированной системы. Данный вопрос оказывается важным по ряду причин. Во-первых, по стабилизированной динамике можно судить об асимптотическом поведении оптимальных траекторий, поскольку она с достаточной точностью аппроксимирует оптимальные решения. Во-вторых, предложенный в работах [4,5,8] численный алгоритм восстановления оптимальных решений в обратном времени опирается на само существование стабилизированных траекторий. Задача стабилизации решается при помощи матричного уравнения Риккати [6] специальной формы [12], которое строится путем замены исходных переменных в гамильтоновой системе, линеаризованной в окрестности стационарной точки. При этом показывается, что найденное решение стабилизирует и исходную гамильтонову систему. Пользуясь решением уравнения Риккати, сопряженные координаты линейно выражаются через фазовый вектор, что позволяет построить стабилизированную гамильтонову систему. Также определяется структура управления, стабилизирующего гамильтонову систему до асимптотической устойчивости по первому приближению.

Постановка задачи

Во многочисленных приложениях [1-4,7,8,12], в которых поведение изучаемых процессов описывается моделями роста, динамика основных факторов подчиняется следующим дифференциальным уравнениям

$$\dot{x}(t) = G\big(x(t)\big) + F\big(x(t)\big)u(t) = \Phi\big(x(t),u(t)\big), x(0) = x_0, u \in U \tag{1}$$

где компоненты вектора $x \in \mathbb{R}^n_{>0}$ являются производственными факторами, а множество $\mathbb{R}^n_{>0}$ содержит все n-мерные действительные вектора с положительными координатами. Компоненты функциональной матрицы $F(x) = \left\{ f_{ij}(x) \right\}_{i,j=1}^{n,m}$ и вектор-функции $G(x) = \left\{ g_i(x) \right\}_{i=1}^{n}$ являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями своих переменных, удовлетворяющие на границе K положительного ортанта $\mathbb{R}^n_{>0}$ условиям: $f_{ij} \geq 0$ и $g_i(x)=0$ для всех $x \in K$ ($i=1,\ldots,n$ $j=1,\ldots,m$), которые обеспечивают выполнение свойства сильной инвариантности [13] неотрицательного ортанта $\mathbb{R}^n_{>0}$ относительно динамики системы (1). Вектор $u=(u_1,\ldots,u_m)^{\mathrm{T}}$ является управляющим параметром системы, который ограничен компактным множеством $U = \prod_{j=1}^{m} \left[0, \bar{u}_j \right]$. В моделях роста эти ограничения являются следствием замкнутости моделируемой экономической системы.

Качество процесса управления описывается интегральным функционалом логарифмического типа с дисконтирующим множителем

$$J(\cdot) = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \ln c\big(x(t),u(t)\big) dt, \ \rho > 0, \tag{2}$$

где функция $c(x(t),u(t))$ определяется равенством $c(x,u) = \prod_{j=1}^{m} \big(1 - u_j - \omega_j(x)\big) f(x)$, а параметр дисконтирования ρ принимает положительные значения. Входящие в выражение $c(x,u)$ компоненты $f(x)$ и $w_j(x)$, $\left(w_j : \mathbb{R}^n_{>0} \mapsto \left[0, 1-\bar{u}_j\right), j = 1,\ldots,m\right)$ являются дважды непрерывно-дифференцируемыми функциями, принимающими неотрицательные значения при всех положительных значениях компонент фазового вектора x. В моделях экономического роста функция $f(x)$ называется *производственной*, а $c(x,u)$ – *функцией потребления*, которая определяет остаток объема выпуска $f(x)$ после финансирования производственных факторов x. Производственная функция $f(x)$ предполагается положительной внутри ортанта $\mathbb{R}^n_{>0}$ неотрицательной на границе K и дважды непрерывно-дифференцируемой для всех $x \in \mathbb{R}^n_{>0}$.

На основании динамической системы (1) и функционала качества (2), формулируется задача оптимального управления, состоящая в построении такого управляемого процесса $(x(t),u(t))$, который обеспечивает максимум функционала качества (2) на траекториях динамической системы (1). Данные задачи тщательно изучены в работах [1,4,5,8,11,12] для моделей размерности не выше третьей. Представленная работа сфокусирована *на условиях существования и поиске такого управления, которое приводит систему в положение устойчивого равновесия в моделях произвольной размерности в предположении о существовании оптимального решения задачи управления*.

Решение задачи приведения системы в устойчивое равновесие

Стационарная гамильтонова $H(x,\psi)$ функция для задачи управления имеет вид

$$H(x,\psi,u) = \sum_{j=1}^{m} \ln\big(1 - u_j - \omega_j(x)\big) + \ln f(x) + \psi^T \Phi(x,u), \tag{3}$$

где $\psi \in \mathbb{R}^n_{>0}$ - вектор сопряженных переменных. Гамильтонова функция (3) строго вогнута [9] по переменным управления $u \in U$. Значение управления $u \in U$, которое доставляет максимум гамильтоновой функции (3), имеет кусочно-непрерывную структуру вида

$$u_j = \min\left\{ \max\left\{0, \tilde{u}_j(x,\psi)\right\}, \bar{u}_j \right\}, \ \tilde{u}_j(x,\psi) = 1 - w_j(x) - \left(\psi^T F_j(x)\right)^{-1}, \ j = 1,\ldots,m \tag{4}$$

и делит 2n-мерное пространство на 3^m областей с различными управляющими режимами. Подставляя (4) в гамильтониан (3), построим максимизированную гамильтонову функцию $H(x,\psi)=H(x,\psi,u)$. Важно то, что функция $H(x,\psi)$ является непрерывно-дифференцируемой функцией своих переменных.

Гамильтонова система принципа максимумам строится по правилу

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H(x,\psi)}{\partial \psi}, \ \dot{\psi}(t) = \rho\psi - \frac{\partial H(x,\psi)}{\partial x}, \ x(0) = x_0, \ \lim_{t \to \infty} e^{-\rho t} \psi^T x = 0 \tag{5}$$

Будем предполагать, что гамильтонова система (5) имеет изолированную стационарную точку $P^* = (x^*, \psi^*) \in \mathbb{R}^n_{>0}$ с положительными координатами. Данное предположение выполняется во многих прикладных задачах, возникающих, например, в экономических приложениях, что подтверждается исследованиями, описанными в работах [1,4,5,8,11]. В этих статьях рассматриваются модели роста разной размерности – от одномерной до трехмерной, но в каждом из случаев существует непустое множество значений моделей параметров, при котором задача определена и имеет изолированную стационарную точку, удовлетворяющую указанному выше предположению. Более того, в ряде приложений, использующих в качестве производственной функции функцию Кобба-Дугласа, она находится явным образом (см. [8,12]).

Рассмотрим матрицу Якоби, вычисленную в стационарной точке P^*, которая является матрицей, линеаризованной в некоторой окрестности $O_\delta(P^*)$ стационарной точки гамильтоновой системы (5)

$$\dot{x}(t) = G\big(x(t)\big) + F\big(x(t)\big)u(t) = \Phi\big(x(t), u(t)\big), x(0) = x_0, u \in U \tag{6}$$

Переменные линейной системы определяют отклонение от равновесия, т.е. $\bar{x} = x - x^*$, $\bar{\psi} = \psi - \psi^*$, а матрицы отвечают равенствам $A = \frac{\partial^2 H(P^*)}{\partial \psi \partial x}$, $B = \frac{\partial^2 H(P^*)}{\partial \psi^2}$ и $C = \frac{\partial^2 H(P^*)}{\partial x^2}$.

В работе [12] для стабилизации линейной системы (6) находится такая матрица X, которая в окрестности $O_\delta(P^*)$ линейно связывает сопряженные $\tilde{\psi}$ и фазовые $\tilde{x}$ переменные, т.е. $\tilde{\psi} = X\tilde{x}$ (см. [6]), и является решением следующего уравнения Риккати $C - X\left(A - \rho/2\,\mathrm{E}_n\right) + \left(\rho/2\,\mathrm{E}_n - A^T\right)X - XBX = 0$ соответствующего системе

$$\dot{\xi} = \left(A - \frac{\rho}{2}\mathrm{E}_n\right)\xi + Bz,\ \dot{z} = C\xi - \left(A^T - \frac{\rho}{2}\mathrm{E}_n\right)z \tag{7}$$

где $\xi = \tilde{x}e^{-\rho t/2}$, $z = \tilde{\psi}e^{-\rho t/2}$.Матрица системы (7) является гамильтоновой, следовательно, ее спектр симметричен относительно мнимой оси. Выбирая n собственных векторов $V = (v_1, ..., v_n)_{2n\times n} = \left(V_1 V_2\right)^T$, отвечающих n собственным значениям с отрицательной действительной частью построим матрицу в виде $X=V_2V_1^{-1}$. Эта матрица X порождает устойчивую систему $\dot{\xi} = (A - \rho/2\,\mathrm{E}_n + BX)\xi$ на подпространстве, образованном собственными векторами V. Та же матрица X связывает исходные переменные $\tilde{\psi} = X\tilde{x}$ и порождает асимптотически устойчивую систему $\dot{\tilde{x}} = (A + BX)\tilde{x}$, что доказывается специальным выбором функции Ляпунова в виде $\mathrm{V}=\xi^T\mathrm{P}\xi$, где матрица P является решением уравнения Ляпунова $(A - \rho/2\,\mathrm{E}_n + BX)^T\,\mathrm{P} + \mathrm{P}(A - \rho/2\,\mathrm{E}_n + BX) = -\mathrm{E}_n$.

Используя полученные результаты и структуру управления $\boldsymbol{u}$ (4), можно показать, что регулятор $\hat{u}(x) = u(x, \psi^* + X(x - x^*))$ приводит систему (5) в положение устойчивого равновесия.

Теорема. Динамическая система $\dot{x} = G(x) + F(x)\hat{u}(x) \equiv \partial H(x, \psi^* + X(x - x^*))/\partial\psi$ асимптотически устойчива по первому приближению в окрестности стационарной точки $O_\delta(P^*)$.

Доказательство. Во-первых, заметим, что x^* есть стационарная точка системы $\dot{x} = G(x) + F(x)\hat{\boldsymbol{u}}(x)$, так как при $x=x^*$ регулятор $\hat{u}(x^*) = u^*$. Линеаризуем систему $\dot{x} = G(x) + F(x)\hat{u}(x)$ в окрестности x^*. Для этого воспользуемся представлением через гамильтонову функцию, т.е. $\dot{x} = \partial H(x, \psi^* + X(x - x^*))/\partial\psi$ и:

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial^2 H(x^*, \psi^*)}{\partial \psi \partial x} + \frac{\partial^2 H(x^*, \psi^*)}{\partial \psi^2} \cdot X\right)\left(x - x^*\right) = (A + BX)(x - x^*), \tag{8}$$

что приводит к устойчивой системе $\dot{x} = \tilde{x} = (A + BX)\tilde{x}$. Таким образом, линеаризованная в стационарной точке система $\dot{x} = G(x) + F(x)\hat{u}(x)$ совпадает с асимптотически устойчивой линейной системой $\dot{\tilde{x}} = (A + BX)\tilde{x}$, что доказывает утверждение теоремы.

Библиография

1. Aseev, S.M., Kryazhimskiy, A.V. (2007) The Pontryagin maximum principle and optimal economic growth problems. Proc. of the Steklov Inst. of Math., (257).

2. Ayres, R., Warr, B. (2009). The Economic Growth Engine: How Energy and Work Drive Material Prosperity. Edward Elgar Publishing, Cheltenham UK.

3. Grass D., Caulkins J., and et al. (2008). Optimal Control of Nonlinear Processes. Springer-Verlag, Berlin.

4. Krasovskii, A., Kryazhimskiy, A., Tarasyev, A. (2008). Optimal control design in models of economic growth. In Evolutionary Methods for Design, Optimization and Control, 70-75. CIMNE, Barcelona.

5. Krasovskii, A. and Tarasyev, A. (2007). Dynamic optimization of investments in the economic growth models. Automation and remote control, 68(10), 1765-1777.

6. Ledyaev, Yu. (2011). On analytical solutions of matrix Riccati equations. Proc. Of the Steklov Inst. of Math., 273(1), 214-228.

7. Tarasyev, A., Zhu, B. (2012). Optimal proportions in growth trends of resource productivity. In Proc. of the 15th IFAC Workshop CAO 12, 45(25), 182-187.

8. Tarasyev, A., Usova, A. (2010). Construction of a regulator for the Hamiltonian system in a two-sector economic growth model. Proc. of the Steklov Inst. of Math., 271, 1-21.

9. Tarasyev, A., Usova, A. (2015). Structure of the Jacobian in economic growth models. In Proc. of the 16th IFAC Workshop CAO 2015, 48(25), 191-196. Germany.

10. Russkikh, O.V., Usova, A.A., Tarasyev, A.M. (2016) Sensitivity of the qualitative behavior of the Hamiltonian trajectories with respect to growth model parameters. In: CEUR Workshop Proc. (1662),110-120.

11. Tarasyev A.M., Usova A.A., Wang W. Hamiltonian Trajectories in a Heterogeneous Economic Growth Model for Optimization Resource Productivity. IFAC-PapersOnLine, 48(25), 2015, 74-79.

12. Usova A.A., Tarasyev A.M., Structure of a Stabilizer for the Hamiltonian Systems. In: Tarasyev A., Maksimov V., Filippova T. (eds) Stability, Control and Differential Games. Lecture Notes in Control and Information Sciences - Proceedings. Springer, Cham. 2020. https://doi.org/10.1007/978-3-030-42831-0_32

13. Aubin, J.P. (2009) Viability theory. Birkhauser Basel, Springer Science+Business Media, New York.

УДК 517.977

DOI 10.53980/9785907599970_197

МЕТОДЫ УЛУЧШЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ В СИСТЕМАХ С ОГРАНИЧЕНИЕМ ВИДА НЕРАВЕНСТВА

Трунин Д.О.*

** Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Россия, Улан-Удэ*
tdobsu@yandex.ru

Конструируется система условий нелокального улучшения управления в классе линейных по управлению задач оптимального управления с терминальным ограничением вида неравенства. Для решения полученной системы, имеющей форму специальной задачи о неподвижной точке в пространстве управлений, рассматриваются итерационные методы последовательных приближений управления с выполнением ограничения на каждой итерации. Предлагаемые методы не содержат трудоемкую операцию параметрического варьирования управления для обеспечения свойства улучшения, характерную для градиентных методов улучшения.

Ключевые слова: *линейная по управлению система, терминальное ограничение вида неравенства, условия улучшения управления, задача о неподвижной точке, итерационный метод.*

METHODS FOR IMPROVING CONTROL IN SYSTEMS WITH INEQUALITY CONSTRAINT

Trunin D.O.*

** Buryat State University, Russia, Ulan-Ude, tdobsu@yandex.ru*

A system of conditions for nonlocal improvement of control is constructed in the class of optimal control problems linear in control with a terminal constraint of the form of inequality. To solve the resulting system, which has the form of a special problem of a fixed point in the space of controls, iterative methods of successive approximations of the control are considered with the fulfillment of the constraint at each iteration. The proposed methods do not contain the time-consuming operation of parametric variation of control to provide the improvement property, which is typical for gradient improvement methods.

Key words*: linear system in control, terminal inequality constraint, control improvement conditions, fixed point problem, iterative method.*

Введение

В работах [1, 2] предложены методы нелокального улучшения управлений в классе линейных и полиномиальных по состоянию задач оптимального управления без ограничений. Эти методы основываются на специальных формулах приращения целевого функционала без остаточных членов разложений и не содержат трудоемкую операцию параметрического варьирования управления в окрестности текущего приближения. Указанные особенности методов являются существенными факторами для повышения эффективности решения задач рассматриваемого класса.

В статье [3] методы нелокального улучшения [2] развиваются и обобщаются для нелинейных по состоянию систем со смешанными управляющими функциями и управляющими параметрами.

В данной работе на основе методов [3] конструируются методы нелокального улучшения управления в задачах оптимального управления с ограничением вида неравенства.

1. Постановка задачи

Рассматривается класс нелинейных по состоянию и линейных по управлению задач оптимального управления с одним терминальным ограничением-неравенством

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = A(x,t)u(t) + b(x,t), \quad x(t_0) = x^0, \\ u(t) \in U \subset R^r, \ \ t \in T = [t_0,\ t_1], \end{gathered} \tag{1}$$

$$I(u) = \varphi\big(x(t_1)\big) + \int_T \big(\langle d(x,t), u\rangle + g(x,t)\big)dt \to \inf, \tag{2}$$

$$\chi\big(x(t_1)\big) \le 0. \tag{3}$$

В задаче (1)–(3) $x(t)=\left(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)\right)$ — вектор состояния, $u(t)=\left(u_1(t),u_2(t),...,u_r(t)\right)$ — вектор управления. Начальное состояние $x^0\in R^n$ задано. Функции $A(x,t)$, $b(x,t)$, $d(x,t)$, $g(x,t)$ нелинейны и дифференцируемы по x и непрерывны по t на множестве $R^n\times T$; функции $\varphi(x)$ и $\chi(x)$ нелинейны и дифференцируемы по x; $U\subset R^r$ — выпуклое компактное множество; интервал времени T фиксирован.

Рассмотрим эквивалентную задачу со смешанным управлением $\sigma=(u,\omega)$:

$$\Phi_0(\sigma)=\varphi\left(x(t_1)\right)+\int_T\left(\left\langle d(x,t),u\right\rangle+g(x,t)\right)dt\to\inf_{\sigma\in\Omega},\tag{4}$$

$$\Phi_1(\sigma)=\chi\left(x(t_1)\right)+\omega=0,\ \omega\geq 0,\ \sigma=(u,\omega).\tag{5}$$

Определим множество доступных управлений в задаче (1), (4), (5)

$$\Omega=\left\{\sigma=(u,\omega);\ u\in V=\{PC^r(T):u(t)\in U,\ t\in T\},\ \ \omega\in W=\left\{\omega\geq 0\right\}\right\}.$$

Для управления $v\in V$ обозначим $x(t,v),\ t\in T$ — решение задачи Коши (1) при $u(t)=v(t)$, $t\in T$. Определим множество допустимых управлений:

$$D=\left\{\sigma\in\Omega:\Phi_1(\sigma)=0\right\}.$$

Поставим задачу улучшения доступного управления $\sigma^I=\left(u^I,\omega^I\right)\in\Omega$: найти управление $\sigma=\left(u,\omega\right)\in D$ со свойством

$$\Phi_0(\sigma)\leq\Phi_0(\sigma^I).$$

Для решения задачи улучшения рассмотрим вспомогательную задачу без ограничений на основе регулярного функционала Лагранжа с множителем $\lambda\in R$:

$$L(\sigma,\lambda)=\Phi_0(\sigma)+\lambda\Phi_1(\sigma)\to\inf_{\sigma\in\Omega}.$$

Рассмотрим функцию Понтрягина с сопряженной переменной $p\in R^n$ для вспомогательной задачи в следующем виде:

$$H(p,x,u,t)=H_0(p,x,t)+\left\langle H_1(p,x,t),u\right\rangle,$$

где $H_0(p,x,t)=\left\langle p,b(x,t)\right\rangle-g(x,t)$, $H_1(p,x,t)=A(x,t)^T\,p-d(x,t)$.

В соответствии с [3] введем модифицированную дифференциально-алгебраическую сопряженную систему:

$$\begin{aligned}
&\dot p=-H_x\left(p,x(t),u(t),t\right)-r(t),\\
&\left\langle H_x\left(p,x(t),u(t),t\right)+r(t),y(t)-x(t)\right\rangle=\\
&=H\left(p,y(t),u(t),t\right)-H\left(p,x(t),u(t),t\right),\\
&p(t_1)=-\varphi_x\left(x(t_1)\right)-\lambda\chi_x\left(x(t_1)\right)-q,\\
&\left\langle\varphi_x\left(x(t_1)\right)+\lambda\chi_x\left(x(t_1)\right)+q,y(t_1)-x(t_1)\right\rangle=\\
&=\varphi\left(y(t_1)\right)-\varphi\left(x(t_1)\right)+\lambda\left(\chi\left(y(t_1)\right)-\chi\left(x(t_1)\right)\right).
\end{aligned}\tag{6}$$

Обозначим через $p(t,u^I,v,\lambda),\ t\in T$ — решение сопряженной системы (6) при $x(t)=x(t,u^I)$, $y(t)=x(t,v)$, $u(t)=u^I(t)$.

Для доступного управления $\sigma^I=\left(u^I,\omega^I\right)\in\Omega$ и параметра проектирования $\alpha>0$ определим следующие отображения:

$$u^\alpha(p,x,t)=P_U\left(u^I(t)+\alpha H_1(p,x,t)\right),\ p\in R^n,\ x\in R^n,\ t\in T,$$

$$\omega^\alpha(\lambda)=P_W\left(\omega^I-\alpha\lambda\right),\ \lambda\in R,$$

где P_U, P_W — операторы проектирования на множества U и W соответственно в евклидовой норме.

В соответствии с [3] получаем, что для улучшения доступного управления достаточно решить при некотором $\alpha > 0$ следующую систему функциональных уравнений в пространстве управлений:

$$\begin{aligned} &v(t) = u^{\alpha}(p(t,u^I,v,\lambda),x(t,v),t),\ t \in T,\ \lambda \in R, \\ &\omega = \omega^{\alpha}(\lambda), \\ &\Phi_1(\sigma) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Система уравнений (7) рассматривается как задача о неподвижной точке в пространстве смешанных доступных управлений с дополнительным алгебраическим уравнением. Это позволяет применить и модифицировать известные итерационные методы неподвижных точек для решения системы (7).

2. Итерационные методы

Для решения системы (7) при заданном $\alpha > 0$ предлагается следующая неявная модификация известного алгоритма метода простой итерации при $k \geq 0$ с заданным начальным приближением $\sigma^0 = \left(v^0, \omega^0\right) \in \Omega$ при $k = 0$:

$$\begin{aligned} &v^{k+1}(t) = u^{\alpha}(p(t,u^I,v^k,\lambda),x(t,v^{k+1}),t),\ t \in T,\ \lambda \in R, \\ &\omega^{k+1} = \omega^{\alpha}(\lambda), \\ &\Phi_1(\sigma^{k+1}) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Другая модификация алгоритма метода простой итерации для решения системы (7) имеет более привычную стандартную явную форму при $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} &v^{k+1}(t) = u^{\alpha}(p(t,u^I,v^k,\lambda),x(t,v^k),t),\ t \in T,\ \lambda \in R, \\ &\omega^{k+1} = \omega^{\alpha}(\lambda), \\ &\Phi_1(\sigma^{k+1}) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Сходимость итерационных процессов (8) и (9) можно исследовать на основе принципа сжимающих отображений аналогично [2]. Главной особенностью предлагаемых итерационных методов является поиск параметра $\lambda \in R$ на каждой итерации при $k \geq 1$ для удовлетворения функционального ограничения. Предполагается, что такая возможность существует.

Заключение

Предлагаемые методы нелокального улучшения допустимых управлений в рассматриваемом классе задач с ограничением вида неравенства характеризуются следующими свойствами:

1. отсутствие трудоемкой процедуры варьирования управления в малой окрестности улучшаемого управления, характерной для градиентных методов;
2. точное выполнение функционального ограничения на каждой итерации улучшения управления.

Указанные свойства методов являются важными факторами для повышения эффективности решения задач оптимального управления с терминальными ограничениями.

Библиография

1. *Срочко В.А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000. – 160 с.

2. *Булдаев А.С.* Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2008. – 260 с.

3. *Булдаев А.С.* Методы неподвижных точек на основе операций проектирования в задачах оптимизации управляющих функций и параметров динамических систем // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. – 2017. – № 1. – С. 38–54.

Bibliography

1. *Srochko V.A.* Iteracionnye metody reshenija zadach optimal'nogo upravlenija [Iterative Methods for Solving Optimal Control Problems]. Moscow: Fizmatlit, 2000. – 160 p.

2. *Buldaev A.S.* Metody vozmushhenij v zadachah uluchshenija i optimizacii upravljaemyh sistem [Perturbation Methods in Problem of the Improvement and Optimization of the Controlled Systems]. Ulan-Ude: Buryat State University, 2008. – 260 p.

3. *Buldaev A.S.* Fixed Point Methods Based on Projection Operations in Problems of Optimization of Control Functions and Parameters of Dynamic Systems // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Infomatics. 2017. – No. 1. – P. 38–54.

УДК 519.711.7:519.2:519.2:62-192

DOI 10.53980/9785907599970_201

РИСК-АНАЛИЗ КАСКАДНЫХ СБОЕВ ВО ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ГАУССОВЫХ СЕТЕВЫХ СТРУКТУРАХ

Тырсин А.Н.*, Кащеев С.Е.**
** Уральский федеральный университет, Россия, Екатеринбург, at2001@yandex.ru*
*** Южно-Уральский государственный университет, Россия, Челябинск, kashcheevs@susu.ru*

В последние годы наблюдаются тенденции увеличения и усложнения современных сетей при росте их зависимости друг от друга. Это приводит к возрастанию рисков каскадных сбоев в таких взаимосвязанных сетевых структурах. В докладе применительно для гауссовых модельных сетевых структур проведено исследование влияния тесноты взаимосвязи между подсистемами на риск возникновения каскадных сбоев. В качестве индикатора риска возникновения каскадных сбоев в сети предложено использовать энтропийный показатель взаимосвязи между ее подсистемами.

Ключевые слова: *сетевая структура, модель, риск, энтропия, каскадный сбой.*

RISK ANALYSIS OF CASCADING FAILURES IN INTERCONNECTED GAUSSIAN NETWORK STRUCTURES

Tyrsin A.N.*, Kashcheev S.E.**
** Ural Federal University, Russia, Yekaterinburg, at2001@yandex.ru*
*** South-Ural State University, Russia, Chelyabinsk, kashcheevs@susu.ru*

In recent years, there have been trends of increasing and complicating modern networks with the growth of their dependence on each other. This leads to an increase in the risks of cascading failures in such interconnected network structures. In the report, applied to Gaussian model network structures, a study was conducted on the effect of the closeness of the relationship between subsystems on the risk of cascading failures. As an indicator of the risk of cascading failures in the network, it is proposed to use the entropy indicator of the relationship between its subsystems.

Key words*: network structure, model, risk, interconnection, entropy, cascading failure.*

Введение

Развитие сетей характеризуется особенностями: 1) Наблюдается тенденция увеличения, как числа элементов, так и подсетей в современных сетях; 2) Сети становятся все более зависимыми друг от друга, часто несколько сетей объединяются в одну взаимозависимую сетевую структуру; 3) Отказ узлов в одной сети может привести к отказу зависимых узлов в других сетях и катастрофическим каскадным сбоям [1]. Поведение реальных систем часто обладает стохастичностью, а связи между их элементами можно адекватно описывать как корреляционные. Модели таких систем обычно акцентируют внимание на явном количественном описании вероятностных характеристик тех или иных ситуаций в жизненном цикле системы [2]. Однако эти модели не позволяют учесть системные характеристики сетевых структур, что ограничивает возможности их эффективного использования в задачах риск-анализа.

Указанные тенденции и отсутствие адекватных математических моделей делают актуальной проблему обеспечения безопасного функционирования связанных сетевых структур. Исследуем на модельных данных влияние многомерных корреляционных связей на риск каскадных сбоев в гауссовых сетевых структурах и определим возможные индикаторы критического уровня риска.

1. Энтропийные индикаторы риска каскадного сбоя гауссовой сети

Сеть с корреляционными связями между ее элементами можно представить в виде непрерывного случайного вектора $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)$ со взаимосвязанными компонентами. Выделим в сетевой структуре (сети) $\mathbf{Y}$ n подсистем (подсетей) $\mathbf{Y}^{(j)}$

$$\mathbf{Y} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{Y}^{(j)} = (\underbrace{Y_1, \ldots, Y_{m_1}}_{\mathbf{Y}^{(1)}}, \underbrace{Y_{m_1+1}, \ldots, Y_{m_1+m_2}}_{\mathbf{Y}^{(2)}}, \ldots, \underbrace{Y_{m_1+\ldots+m_{n-1}+1}, \ldots, Y_{m_1+\ldots+m_n}}_{\mathbf{Y}^{(n)}}). \quad (1)$$

Одной их характеристик случайного вектора **Y** является дифференциальная энтропия $H(\mathbf{Y})$ [3]. На основе $H(\mathbf{Y})$ для описания сетевых структур в [4] предложено несколько показателей. Некоторые их них могут быть использованы для риск-анализа сетей. Энтропийная мера самоорганизации

$$G(\mathbf{Y}) = -0{,}5 \cdot \sum_{k=2}^{m} \ln(1 - R^2_{Y_k|Y_1 \ldots Y_{k-1}}) \quad (2)$$

отражает степень взаимосвязи между элементами системы **Y**: при полной взаимной независимости между элементами системы $G(\mathbf{Y}) = 0$; при строгой функциональной зависимости между хотя бы двумя элементами системы $G_R(\mathbf{Y}) \to +\infty$. Здесь $R^2_{Y_k|Y_1 \ldots Y_{k-1}}$ – индекс детерминации в общем случае нелинейной регрессионной зависимости случайной величины Y_k, от случайных величин $Y_1, \ldots, Y_{k-1}$.

Энтропийный показатель взаимосвязи между несколькими подсистемами $\mathbf{Y}^{(1)}, \ldots, \mathbf{Y}^{(n)}$ сетевой структуры $\mathbf{Y} = \bigcup_{j=1}^{n} \mathbf{Y}^{(j)}$ равен

$$G(\bigcap_{j=1}^{n} \mathbf{Y}^{(j)}) = -\frac{1}{2} \ln \frac{1 - d(\bigcup_{j=1}^{n} \mathbf{Y}^{(j)})}{\prod_{j=1}^{n} (1 - d(\mathbf{Y}^{(j)})}, \quad (3)$$

где $d(\mathbf{Y}) = 1 - \prod_{k=2}^{m} (1 - R^2_{Y_k|Y_1 \ldots Y_{k-1}})$, $d(\mathbf{Y}^{(j)}) = 1 - \prod_{k=2}^{m_j} (1 - R^2_{Y_{j,k}|Y_{j,1} \ldots Y_{j,k-1}})$.

Если $\mathbf{Y}^\circ$ – гауссов случайный вектор, то

$$G(\bigcap_{j=1}^{n} \mathbf{Y}^{(j)\circ}) = -\frac{1}{2} \ln \frac{\left|\mathbf{R}_{\bigcup_{j=1}^{n} \mathbf{Y}^{(j)\circ}}\right|}{\prod_{j=1}^{n} \left|\mathbf{R}_{\mathbf{Y}^{(j)\circ}}\right|}. \quad (4)$$

Если все $m_j = 1$, т.е. $\mathbf{Y}^{(j)} = Y_j$, $j = 1, \ldots, N$, то формула (4) примет вид

$$G(\bigcap_{j=1}^{n} \mathbf{Y}^{(j)\circ}) = G(\mathbf{Y}) = -\frac{1}{2} \ln \left|\mathbf{R}_{\bigcup_{j=1}^{n} \mathbf{Y}^{(j)\circ}}\right| = -\frac{1}{2} \ln \left|\mathbf{R}_{\mathbf{Y}^\circ}\right|. \quad (5)$$

Энтропийный показатель взаимосвязи между гауссовой случайной величиной Z и гауссовым случайным вектором $\mathbf{Y}^\circ$ равен

$$G(Z \cap \mathbf{Y}^\circ) = -\frac{1}{2} \ln \frac{\left|\mathbf{R}_{Z \cup \mathbf{Y}^\circ}\right|}{\left|\mathbf{R}_{\mathbf{Y}^\circ}\right|}. \quad (6)$$

2. Оценка риска каскадных сбоев в гауссовых сетевых структурах

Рассмотрим сетевую структуру **S** в виде двух взаимосвязанных гауссовых подсистем **X** и **Y**, каждая из которых состоит из четырех элементов, являющихся стандартными гауссовыми случайными величинами. Корреляционная матрица приведена в таблице 1. Будем считать, что все элементы сетей функционируют в одинаковых условиях риска. Считаем отказом каждого элемента сети событие B_i – попадание значения вне области допустимых значений $(-A, A)$, $A > 0$.

Таблица 1 – Корреляционная матрица сетевой структуры из двух подсистем

	X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	1	0,7	0,6	0,4	0,8	0,75	0,2	0,2
X_2	0,7	1	0,1	0,5	0,7	0,8	0,2	0,4
X_3	0,6	0,1	1	0,3	0,5	0,5	0,1	0,1
X_4	0,4	0,5	0,3	1	0,4	0,3	0,2	0,2
Y_1	0,8	0,7	0,5	0,4	1	0,6	0,2	0,4

Y_2	0,75	0,8	0,5	0,3	0,6	1	0,1	0,25
Y_3	0,2	0,2	0,1	0,2	0,2	0,1	1	0,4
Y_4	0,2	0,4	0,1	0,2	0,4	0,25	0,4	1

Определим, насколько уменьшатся энтропийные показатели взаимосвязи $G(\mathbf{S})$ и $G(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$ в результате удаления одного из элементов. Результаты приведены в таблице 2. Наибольшее уменьшение показателей в обоих случаях будет при удалении из системы элементов X_2 и Y_2.

Таблица 2 – Уменьшение энтропийных показателей взаимосвязи $G(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$ и $G(\mathbf{S})$ в результате удаления из системы одного из элементов

Удаляемый элемент	Уменьшение показателя взаимосвязи	
	$\Delta G(\mathrm{S})$	$\Delta G(\mathrm{X} \cap \mathrm{Y})$
X_1	0,96	0,20
X_2	**2,11**	**1,46**
X_3	1,61	1,13
X_4	0,89	0,68
Y_1	1,16	0,88
Y_2	**1,76**	**1,54**
Y_3	0,12	0,03
Y_4	0,32	0,16

Далее для всех 28 случаев были определены изменения (уменьшения) коэффициентов корреляционной взаимосвязи $G(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$ и $G(\mathbf{S})$ при уменьшении одного из парных коэффициентов корреляции между элементами системы на одну и туже величину, равную, например, 0,03. Результаты для наибольших изменений приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Уменьшение показателей $G(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$, $G(\mathbf{S})$ и $P(D)$ и вероятности отказа системы при уменьшении одного из парных коэффициентов корреляции на 0,03

Уменьшение показателя	Уменьшаемый коэффициент корреляции					
	$\rho_{X_2Y_2}$	$\rho_{X_3Y_2}$	$\rho_{X_2Y_1}$	$\rho_{X_2X_4}$	$\rho_{X_3Y_1}$	$\rho_{X_3X_4}$
$\Delta G(\mathbf{S})$	**0,643**	0,466	0,363	0,344	0,257	0,234
$\Delta G(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$	**0,643**	0,466	0,363	0,314	0,257	0,215
$\Delta P(D)$	**4,6%**	2,4%	2,1%	1,1%	0,7%	1,0%

Считаем отказом каждого элемента попадание значения вне интервала $(-A, A)$, $A = 2{,}5$. В качестве каскадного сбоя будем считать ситуации, когда одновременно отказали хотя бы 3 элемента одной подсистемы и хотя бы два элемента другой подсистемы. Вероятность отказа для системы **S** $P(D) = 0{,}000545$. Оценим, насколько она изменится при уменьшении одного из парных коэффициентов корреляции на 0,03. Видим, что на риск отказа сетевой структуры в виде каскадного сбоя в первую очередь влияет высокая корреляция между элементами X_2 и Y_2. Например, уменьшение коэффициента корреляции ρ_{X_2,Y_2} до 0,25 позволит снизить вероятность каскадного сбоя в системе **S** на 63,3%, или в 2,72 раза. Отметим, что одновременно у критических элементов присутствует возможность снижения коэффициента парной корреляции между ними.

Заключение

Показано, что в качестве индикатора риска возникновения каскадных сбоев в сетевой структуре может быть использован коэффициент корреляционной взаимосвязи между ее подсистемами. Для снижения риска возникновения каскадных сбоев в сетевой структуре следует уменьшать тесноту корреляции между наиболее взаимосвязанными элементами подсистем.

Библиография

1. *Buldyrev S.V., Parshani R., Paul G., Stanley H.E., Havlin Sh.* Catastrophic cascade of failures in interdependent networks // Nature. 2010. – Vol. 464. – P. 1025-1028. DOI: 10.1038/nature08932

2. *Булатов В.В.* Введение в математические методы моделирования сложных систем. М.: ОнтоПринт, 2018. – 338 с.

3. *Shannon C.E.* A Mathematical Theory of Communication // The Bell System Technical Journal. 1948. – Vol. 27(4). – P. 623-656.

4. Тырсин А.Н. Энтропийное моделирование сетевых структур // Автоматика и телемеханика. 2022. – № 10. – С. 144-155. DOI: 10.31857/S0005231022100130

Bibliography

1. *Buldyrev S.V., Parshani R., Paul G., Stanley H.E., Havlin Sh.* Catastrophic cascade of failures in interdependent networks // Nature. 2010. – Vol. 464. – P. 1025-1028. DOI: 10.1038/nature08932

2. *Bulatov V.V.* Vvedeniye v matematicheskiye metody modelirovaniya slozhnykh sistem [Introduction to mathematical methods for modeling complex systems]. M.: OntoPrint, 2018. – 338 p.

3. *Shannon C.E.* A Mathematical Theory of Communication // The Bell System Technical Journal. 1948. – Vol. 27, No. 4. – P. 623-656.

4. *Tyrsin A.N.* Entropy Modeling of Network Structures // Automation and Remote Control. 2022. – Vol. 83, No. 10. – P. 1608-1618. DOI: 10.1134/S00051179220100137

УДК 378.147:004

DOI 10.53980/9785907599970_205

ГРАФИЧЕСКАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ В ТЕСТАХ ПО МАТЕМАТИКЕ

Устинова И.Г.*, Янущик О.В.*, **, Беляускене Е.А.*, Имас О.Н.*, Рожкова С.В.*, ***
** Национальный исследовательский Томский политехнический университет,*
Россия, Томск, igu@tpu.ru, yanuschik@tpu.ru, eam@tpu.ru, onm@tpu.ru, rozhkova@tpu.ru
*** Томский государственный университет систем управления и радио-электроники, Россия, Томск, yanuschik@tpu.ru*
****Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, Томск, rozhkova@tpu.ru*

В статье показан опыт внедрения визуализации при создании вопросов типа STACK курса Математика. Предлагается применять элементы визуализации на разных этапах создания тестового вопроса: при постановке задания, при создании отзыва на ответ студента, в процессе предоставления подсказок.

Приведены примеры использования возможностей плагина STACK для создания компонентов визуализации.

Ключевые слова: *математика, визуализация, задание типа STACK.*

GRAPHICAL VISUALIZATION IN THE MATH TESTS

Ustinova I.G.*, Yanuschik O.V.*, **, Beliauskene E.A.*, Imas O.N.*, Rozhkova S.V.*, ***
** National Research Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk,*
igu@tpu.ru, yanuschik@tpu.ru, eam@tpu.ru, onm@tpu.ru, rozhkova@tpu.ru
*** Tomsk state university of control system and radio electronics, Russia, Tomsk, yanuschik@tpu.ru*
**** National Research Tomsk State University, Russia, Tomsk, rozhkova@tpu.ru*

The article shows the experience of implementing visualization when creating questions of the STACK type of the Mathematics course. It is proposed to use visualization elements at different stages of creating a test question: when setting a task, when creating a response to a student's answer, in the process of providing hints. Examples of using the capabilities of the STACK plugin to create visualization components are given.

Key words*: Mathematics, visualization, STACK type task.*

Введение

Современное высшее образование требует совершенствование подходов в организации образовательного процесса и применение таких технологий, которые бы дали возможность студенту лучше понять и освоить материал. Одной из возможностей в решении этой сложной и насущной задачи мы видим в применении компьютерных технологий в качестве Web поддержки дисциплины. В качестве такой Web поддержки в Томском политехническом университете используются тесты STACK, созданные для изучения курса математики. В данной работе мы хотим остановиться на применении визуализации при создании вопросов типа STACK курса Математика для студентов-бакалавров.

1. Что такое STACK

Для реализации задачи по отработки и проверки навыков решения задач преподаватели-математики ТПУ создали методический комплекс «STACK тренажер». Это банк заданий из 1200 вопросов типа STACK по всем темам, изучаемым в первом семестре.

Все задания банка разработаны в специализированном программном пакете The System for Teaching and Assessment Using a Computer Algebra Kernel (STACK), созданного Кристофером Сангвином (Университет Лафборо) в 2005 году [1] как дополнительный плагин к образовательной платформе MOODLE. В 2013 году версия 3.0 была интегрирована в качестве отдельного типа вопроса в Moodle [2] или ILIAS. STACK функционирует совместно с Computer algebra system (CAS) «Maxima», благодаря чему студенты могут вводить ответ в виде аналитического выражения вместо

того, чтобы просто выбирать правильный ответ, как в вопросе с множественным выбором, в котором студент может угадать правильный ответ. Функция проверки ответа сформирована разработчиками в блоке PRT (Potential Response Tree). Здесь происходит сравнение ответа студента с введенным ответом преподавателя посредством присоединенного пакета Maxima. Задания STACK отличаются от обычных тестовых заданий тем, что имеется возможность:

• каждым студентом получать свой набор задач с параметрами отличными от параметров аналогичных заданий одногруппников за счет использования функции случайных чисел,

• мгновенной обратной связи,

• создания системы подсказок,

• предоставления развернутого отзыва,

• выполнения задания в удобное время и в своем темпе,

• ввода ответа в виде аналитического выражения вместо того, чтобы просто выбирать правильный ответ, как в вопросе с множественным выбором, в котором студент может угадать правильный ответ.

2. Что понимаем под визуализацией

В данной работе под визуализацией математических понятий, принципов, проблем или процессов мы будем понимать их геометрические или графические представления, созданные с помощью компьютера [3]. Визуальному представлению понятий вузовского курса математики в тестах с вопросами STACK могут помочь компьютерная программа GeoGebra или внутренние возможности STACK.

С вариантами и опытом использования GeoGebra в процессе обучения можно ознакомиться в статьях [4–6]. Разработанные для показа динамические чертежи GeoGebra можно демонстрировать в самом приложении, а именно, на сайте программы geogebra.org. Подчеркнём также, что при размещении чертежа GeoGebra в html-документ сохраняется возможность работы с этим объектом.

В банке задач «STACK тренажер» содержатся вопросы, в которых визуализация использовалась на разных этапах создания тестового вопроса: при постановке задания, при создании отзыва на ответ студента, в процессе предоставления подсказок, использующие внутренние возможности программы STACK.

Приведем примеры вопросов STACK с элементами визуализации, использующие внутренние возможности данной программы.

Рассмотрим пример визуализации в тексте вопроса (рис. 1).

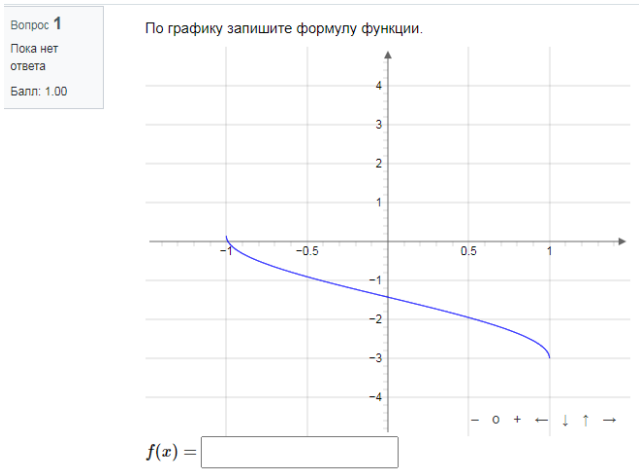


Рисунок 1 – Визуализация в тексте вопроса

Студент вводит ответ в специально отведенное окно, как показано на рисунке 1 и мгновенно получает отклик системы на свой ответ.

На рисунке 2 представлен пример, в котором визуализация имеет место в отзыве на ответ студента.

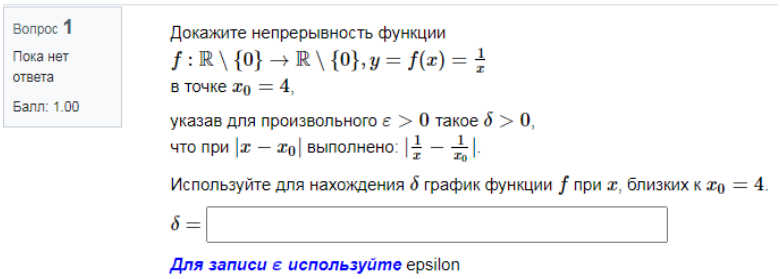


Рисунок 2 – Вопрос, в котором элемент визуализации в отзыве на ответ

Введя правильный ответ в специально отведенное поле (см. рис. 2) $\delta = (16*epsilon)/(4*epsilon+1)$, студент получит отзыв (см. рис. 3).

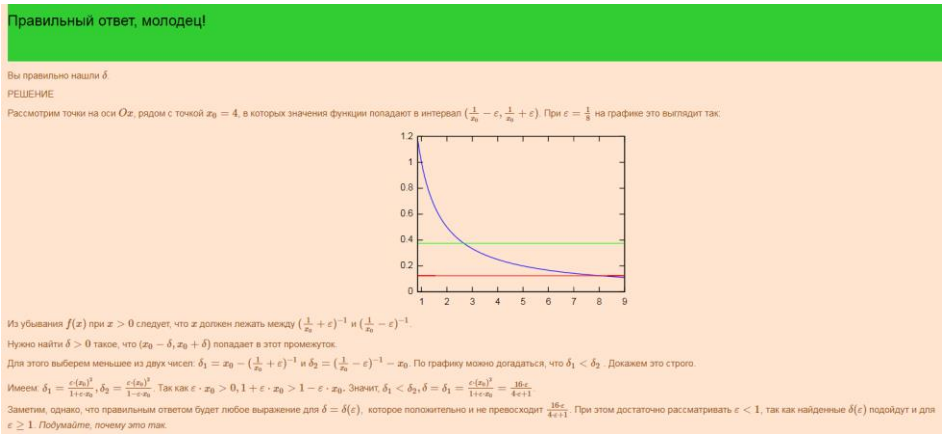


Рисунок 3 – Отзыв системы на правильный ответ студента

Заключение

Таким образом, использование визуализации позволяет создавать вопросы STACK, в которых реализуется один из основных принципов при обучении математике – принцип наглядности, который позволяет излагать учебный материал в более доступной форме.

Библиография

1. https://www.optes.de
2. Daniel M., Wingerter B. STACK – Ein neuer Fragetyp in der Mathematik. Tagungsband zum 2. HD-MINT Symposium, Nürnberg, 2015. − P. 54-57.
3. *Zimmermann W., Cunningham S.* Visualization in teaching and learning mathematics. Washington: Math. Assoc. of America, 1991. − 224 p.
4. *Ширикова Т.С.* Методика обучения учащихся основной школы доказательству теорем при изучении геометрии с использованием GeoGebra. Диссертация на соискание ученой степени кандидата педагогических наук. Архангельск: 2014. − 250 с.
5. *Безумова О.Л., Овчинникова Р.П., Троицкая О.Н., Троицкий А.Г., Форкунова Л.В., Шабанова М.В., Ширикова Т.С., Томилова О.М.* Обучение геометрии с использованием возможностей GeoGebra: учебно-методическое пособие. Архангельск: КИРА, 2011. − 140 с.
6. *Ларин С.В.* Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. Ростов-на-Дону: Легион, 2015. − 192 с.

Bibliography

1. https://www.optes.de
2. *Daniel M., Wingerter B.* STACK - A new type of question in mathematics. Proceedings of the 2nd HD-MINT Symposium, Nuremberg, 2015. − P. 54-57.

3. *Zimmermann W., Cunningham S.* Visualization in teaching and learning mathematics. Washington: Math. Assoc. of America, 1991. − 224 p.

4. *Shirikova T.S.* Metodika obucheniya uchashchihsya osnovnoj shkoly dokazatel'stvu teorem pri izuchenii geometrii s ispol'zovaniem GeoGebra [Methods of teaching basic school students to prove theorems when studying geometry using GeoGebra.] Thesis for the degree of PhD of Pedagogy. Arkhangelsk: 2014. − 250 p.

5. *Bezumova O.L., Ovchinnikova R.P., Troitskaya O.N., Troitskiy A.G., Forkunova L.V., Shabanova M.V., Shirikova T.S., Tomilova O.M*. Obuchenie geometrii s ispol'zovaniem vozmozhnostej GeoGebra: uchebno-metodicheskoe posobie [Teaching geometry using the capabilities of GeoGebra: an educational and methodological guide.] Arkhangelsk: КИРА, 2011. − 140 p.

6. *Larin S.V.* Komp'yuternaya animaciya v srede GeoGebra na urokah matematiki [Computer animation in the GeoGebra environment in mathematics lessons.] Rostov-on-Don: Legion, 2015. − 192 p.

УДК 517.911.5

DOI 10.53980/9785907599970_209

О ПОЗИЦИОННЫХ РАЗРЫВНЫХ И ИМПУЛЬСНЫХ УПРАВЛЕНИЯХ

Финогенко И.А.
Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН
Россия, Иркутск, fin@icc.ru

Исследуются идеальные импульсно-скользящие режимы дифференциальных включений и разрывные системы с релейными управлениями. На основе установленной между ними связи для управляемых разрывных систем рассматриваются комбинации, состоящие из импульсных и обычных позиционных управлений, когда для последних в системе не хватает ресурсов управления.
Ключевые слова: *импульсно-скользящий режим, релейное управление, дифференциальное включение, сухое трение*

ON POSITIONAL DISCONTINUOUS AND IMPULSE CONTROLS

Finogenko I.A.
V.M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS
Russia, Irkutsk, fin@icc.ru

Ideal impulse-sliding modes of differential inclusions and discontinuous systems with relay controls are investigated. On the basis of the connection established between them for controlled discontinuous systems, combinations consisting of impulse and conventional positional controls are considered, when there are not enough control resources for the latter in the system.
Keywords: *Pulse-sliding mode, relay control, differential switching, dry friction*

1. Введение

Рассмотрим управляемый объект, представленный дифференциальным включением

$$\dot{x} \in F(t,x) + u, \tag{1}$$

где $x = (x_1,...,x_n)$, $u \to p(t,x)\delta(t)$ - абстрактный оператор, подразумевающий дискретную реализацию "`бегущего импульса"' в виде последовательности корректирующих импульсов, сосредоточенных в точках $h: t_1,...,t_k$ разбиения отрезка *I*. Кривая $x^h(t)$, совпадающая на промежутках между точками разбиения с решением задачи Коши

$$\dot{x} \in F(t,x),\ x(t_k) = x^h(t_k) + p(t_k, x^h(t_k))$$

называется ломаной Эйлера. В дальнейшем мы следуем определениям из работы [1] и рассматриваем случай, когда в результате действия корректирующего импульса в момент времени t_k предельная справа точка интегральной кривой, соответствующей ломаной Эйлера, оказывается на некотором многообразии $S = \{(t,x) \in R^{n+1} : \sigma^j(t,x) = 0,\ j = 1,...,m\}$. Тогда сеть ломаных Эйлера называется импульсно-скользящим режимом, а функции предельные для равномерно сходящихся последовательностей ломаных Эйлера - идеальными (предельными) импульсно-скользящим режимами.

Легко заметить, что интегральные кривые идеальных импульсно-скользящих режимов лежат на многообразии *S*. Но в большей степени такого вида движения управляемых систем являются атрибутом систем с разрывными позиционными управлениями (обратными связями) и теории разрывных систем. Тогда естественно возникает вопрос об описании идеального импульсно-скользящего режима некоторым дифференциальным уравнением, для которого идеальный импульсно-скользящий режим дифференциального включения (1) является бы обычным скользящим режимом в смысле теории разрывных систем. Как правило, дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями рассматриваются в форме дифференциальных включений. Поэтому изначально мы рассматриваем импульсно-скользящие режимы включения (1), для которого

подбирается подходящая систем с релейными управлениями так, чтобы идеальный импульсно-скользящий режим (1) совпадал с ее скользящим режимом. В результате возникает возможность построения комбинаций импульсных и обычных позиционных управлений.

2. Комбинации импульсно-скользящих и скользящих режимов

Достаточно хорошо исследованы системы вида

$$\dot{x} = f(t,x) + B(t,x)u(t,x), \tag{2}$$

где $B(t,x)$ - $n \times m$ матрица и управление $u(t,x) = (u_1(t,x),...,u_m(t,x))$. Задача заключается в выборе матрицы $B(t,x)$ и управления $u(t,x)$ так, чтобы скользящий режим системы (2), представленной в форме дифференциального включения, совпадал с идеальным импульсно-скользящим режимом для системы (1). Эта задача была поставлена и решена в работах [2,3]. Здесь мы продемонстрируем эти результаты на содержательном примере управления линейным осциллятором с сухим трением.

Рассматривается тело единичной массы, которое движется по горизонтальной прямой Ox по действием силы пружины с коэффициентом упругости *k.* Силу тяжести запишем в виде *P=mg*. Сила сухого трения Кулона определяется по формуле $F^{fr}(\dot{x}) = -fP\,\mathrm{sgn}\,\dot{x}$. Коэффициент трения f является постоянным. При условии $\dot{x} = 0$ полагаем $F^r(0) = [-fP,\ fP]$.

Мы рассматриваем уравнение движения описанной выше системы при дополнительном условии: имеется управление *u,* которое может быть как импульсным, так и обычным релейным вида $u = -H\,\mathrm{sgn}(\dot{x} + ax)$. Уравнение движения запишется в виде:

$$\ddot{x} \in -kx + F^{fr} + u. \tag{3}$$

Поведение системы (3) при условии *u=0* хорошо известно. Траекториями решений являются полуэллипсы, с центрами на концах отрезка $Z = \{(x,0) : |x| \le fP/k\}$. Этот отрезок называется зоной застоя, и представляет собой множество неизолированных положений равновесия. Наличие таких положений равновесия – отличительная особенность систем с трением. Тело останавливается через конечное время в состоянии, которое может оказаться любой точкой зоны застоя. Цель нашего управления - обеспечить экспоненциальное движение системы в положение $x = 0, \dot{x} = 0$.

Для достижения поставленной выше цели управляющая сила *u* должна преодолевать силу трения. Интуитивно понятно, что решение задачи зависит от соотношения между силой трения и ресурсом управления *H,* а также от выбора целевого множества, которое определим в виде $S = \{(\dot{x},x) : \dot{x} + ax = 0\}$, где *a>0* - произвольный параметр. Примем следующие обозначения:

$$L=(fP-H)/k,\ \alpha = (fP+H)/(k+a^2),\ \beta = (fP-H)/(k+a^2),\ \alpha_1 = a\alpha,\ \beta_1 = a\beta$$

и введем в рассмотрение систему

$$\ddot{x} \in -kx + F^{fr} - H\,\mathrm{sgn}(\dot{x} + ax). \tag{4}$$

Анализ уравнения (4) показал следующее.

1. В случае, когда сила трения превосходит ресурс управления (т.е. *fP> H),* у системы возникает зона застоя, представляющая собой отрезок *Z=[-L,L]* на оси *Ox.*

2. В случае $fP \le H$ зона застоя отсутствует и система имеет единственное положение равновесия в начале координат, к которому на прямой *S* возникает устойчивый скользящий режим.

Рассмотрим движение системы (3) под действием импульсного позиционного управления $u \to p(x,\dot{x})\delta(t)$. Это управление, реализованное, как множество ломаных Эйлера, приводит систему на прямую *S*. При попадании ломаной Эйлера при очередном корректирующем импульсе на отрезок *AB* на рисунке 3, дальнейшее движение системы до точки *B* будет, происходить, как скользящий режим, управляемой системы (4), после чего вновь начнется импульсно-скользящий режим системы (3).

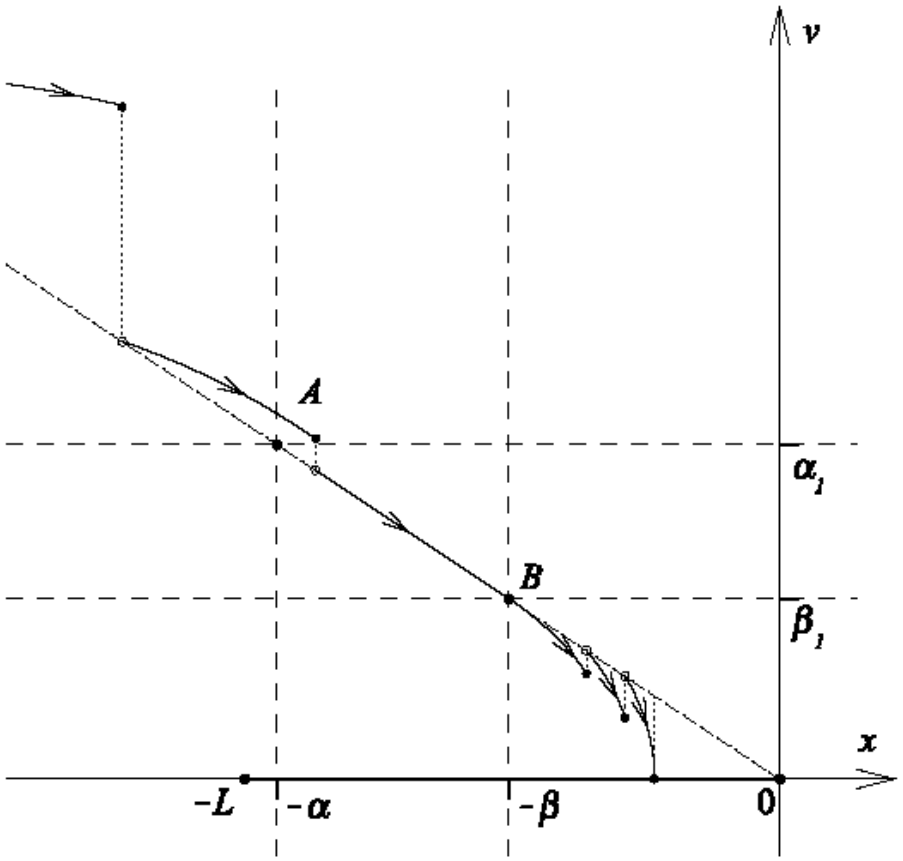


Рисунок 1 – Скользящий и импульсно-скользящий режимы при условии $fP > H$.

Заключение

В работе рассмотрена новая задача о комбинированном использовании импульсных и обычных разрывных обратных связях. Импульсные управления в форме ломаных Эйлера могут воздействовать на систему без каких-либо условий и ограничений. Здесь возникает лишь вопрос о способе их реализации. Но в то же время вместо импульсных управлений при наличии достаточных ресурсов могут использоваться обычные релейные управления.

Библиография

1. *Завалищин С.Т., Сесекин А.Н., Дрозденко С.Е.* Динамические системы с импульсной структурой. – Свердловск: Сред.-Урал. кн. изд-во, 1983. – 112 с.

2. *Finogenko I.A., Sesekin A. N.* Pozitional impulse and discontinuous control for differential inclusion // Ural Mathematical Journal, 2020. – Vol. 6. No. 2. – P. 68-75.

3. *Finogenko I.A. Sesekin A.N.* Approximation of Positional Impulse Controls for Differential Inclusions // Ural Mathematical Journal. 2022. – Vol. 8. No. 1. – P.. 43--54.

Bibliography

1. *Zavalishchin S.T., Sesekin A.N., Drozdenko S.E.* Dynamic systems with impulse structure. Sverdlovsk: Middle-Ural. book. publishing house, 1983. – 112 p.

2. *Finogenko I.A., Sesekin A. N.* Pozitional impulse and discontinuous control for differential inclusion // Ural Mathematical Journal, 2020. – Vol. 6. No. 2. – P. 68-75.

3. *Finogenko I.A. Sesekin A.N.* Approximation of Positional Impulse Controls for Differential Inclusions // Ural Mathematical Journal. 2022. – Vol. 8. No. 1. – P.. 43--54.

УДК 004.023

DOI 10.53980/9785907599970_212

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПОКРЫТИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Фроловский В.Д.
Новосибирский государственный технический университет,
Россия, Новосибирск, frolovskij@corp.nstu.ru

Задача принадлежит к классу NP-трудных задач оптимального геометрического проектирования «раскроя - упаковки» и заключается в том, что требуется расположить некоторые геометрические объекты на покрываемой поверхности таким образом, чтобы вся поверхность была покрыта целиком с наименьшими материальными затратами. В докладе представлены результаты исследований стохастических адаптационных алгоритмов: генетический алгоритм, алгоритм муравьиных колоний, метод частиц и др. Рассмотрены модельные и прикладные задачи проектирования систем видеонаблюдения, агротехнических систем полива.

Ключевые слова: *геометрические покрытия, стохастическая оптимизация, метаэвристические алгоритмы, прикладные задачи.*

MATHEMATICAL MODELS AND METHODS FOR SOLVING OPTIMIZATION PROBLEMS GEOMETRIC COATINGS AND THEIR APPLICATIONS

Frolovsky V.D.
Novosibirsk State Technical University,
Russia, Novosibirsk, frolovskij@corp.nstu.ru

The problem belongs to the class of NP-hard problems of optimal geometric design of "cutting - packing" and consists in the fact that it is required to arrange some geometric objects on the surface to be covered in such a way that the entire surface is covered entirely with the least material costs. The report presents the results of studies of stochastic adaptation algorithms: genetic algorithm, ant colony algorithm, particle method, etc. Model and applied problems of designing video surveillance systems, agrotechnical irrigation systems are considered.

Key words*: geometric coverings, stochastic optimization, metaheuristic algorithms, applied problems.*

Введение

Научное начало теории оптимального использования ресурсов заложено Л.В. Канторовичем в 1939 г. и получило развитие в работах Э.А. Мухачевой, И.В. Романовского, Ю.Г. Стояна и др. [1]. Развитие соответствующих оптимизационных методов направлено, с одной стороны, на создание формального математического аппарата и выявление особенностей данного класса задач на основе единого подхода к их описанию, с другой стороны, на разработку практичных моделей и оптимизационных методов для решения соответствующих задач в конкретных технологических условиях. Задача геометрического покрытия является частным случаем задачи оптимального геометрического проектирования и принадлежит к классу задач «раскроя и упаковки». В отличие от других задач этого класса, задачи покрытия мало изучены на сегодняшний день. Геометрические покрытия имеют большое практическое значение для систем видеонаблюдения, безопасности, сотовой связи, телекоммуникация, а также агротехнических и экологических систем. Сложность рассматриваемых задач оптимального проектирования обусловлена их принадлежностью к классу *NP*-трудных задач, что не дает возможности их решения точными методами и требует построения приближенных оптимизационных методов и алгоритмов.

1. Постановка задач исследования

1.1. Общая постановка задачи геометрического покрытия

Имеется некоторая область, которую нужно покрыть ограниченным количеством объектов, размер и форма которых может быть разнообразной. Необходимо, чтобы была покрыта вся заданная область, и при этом было как можно меньше перекрытий, что и обеспечивает рациональное использование

технологических ресурсов [2]. Пусть в двумерном пространстве имеется покрываемая область S_0 и покрывающие геометрические объекты $S_1,\ldots,S_m$. Требуется расположить геометрические объекты на покрываемой поверхности таким образом, чтобы вся поверхность была покрыта полностью, т.е. должно выполняться следующее условие: $S_0 \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i \right) = S_0$, где n – общее количество использованных объектов. Критерии оптимизации: 1) минимизация количества покрывающих объектов $F_1 = n \to \min$; 2) минимизация стоимости соответствующих ресурсов $F_2 = \sum_{i=1}^{n} P_i \to \min$, где P_i – стоимость использования i-го объекта; 3) минимизация перекрытий $F_3 = \bigcap_{i=1}^{n} S_i + \left(\sum_{i=1}^{n} S_i - \bigcap_{i=1}^{n} S_i - S_0 \right) \to \min$. Можно использовать комплексный аддитивный или мультипликативный критерий.

1.2. Проектирование систем видеонаблюдения

В 1973 году Victor Klee изложил проблему определения минимального количества охранников, достаточного для того, чтобы покрыть интерьер комнаты картинной галереи (art gallery) [3]. Рассмотренная задача достаточно далека от реальности из-за допущений, что охранник имеет угол обзора 360 градусов и бесконечную дальность видимости. Несмотря на то, что существуют камеры с таким углом обзора, они чрезвычайно дороги, и не обладают разрешением, которое позволит разглядеть детали на достаточно дальнем расстоянии. Таким образом вводятся ограничения на угол обзора и эффективную дальность видимости камер.

Задача заключается в определении минимального количества видеокамер, достаточного для того, чтобы покрыть интерьер комнаты картинной галереи (art gallery). В формальной постановки область покрытия представляется многоугольником P и определяется как набор n вершин ребер. Пусть точка $x \in P$ «видит» и покрывает точку $y \in P$, если отрезок xy является подмножеством P : $xy \in P$. При этом xy может касаться границы P в одной или нескольких точках, это не препятствует видимости. Определим $G(P)$ как минимальное число точек P, которые покрывают весь многоугольник: набор k точек в P, $\{x_1, \cdots, x_k\}$, такой, чтобы для любой точки $y \in P$ существовал некоторый $x_i, 1 \le i \le k$, который покрывает y. Определим $g(n)$ как максимальное значение $G(P)$. Оригинальная задача состоит в том, чтобы определить $g(n)$. Покрывающие точки – это видеокамеры, с заданным углом обзора и фиксированной позицией. Функция $g(n)$ представляет максимальное число видеокамер, которое необходимо и достаточно для видеоконтроля n-угольника.

1.3. Проектирование агротехнических систем полива

Многие компании, занимающиеся проектированием, реализацией и обслуживанием систем автоматического полива, такие как Лэнд Строй, Автополив [4] и др. предоставляют своим клиентам услуги по профессиональному компьютерному проектированию систем автоматического полива на загородных участках, спортивных сооружениях, парках и других объектах. Как правило, количество и расположение устройств полива приводит к большой площади перекрытия этих устройств и удорожанию системы. Также имеются инструкции самостоятельной разработки подобной системы, которые, как правило, также не позволяют спроектировать систему с минимальными перекрытиями и затратами на оборудование. Зачастую решение задачи выполняется вручную, что неизбежно ведет к значительным временным затратам. Рассматривается следующая оптимизационная задача.

Дана область A (план земельного участка) На области A определено множество запретных участков $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ (участки занятые хозяйственными постройками). Требуется покрыть область $A \backslash P$ наименьшим числом устройств полива (наименьшими затратами на систему полива), которые имеют разные мощности, стоимости и радиусы охвата площади полива из заданного множества приборов. Т.е. покрывающие объекты представлены кругами разного радиусы. Решение будет допустимым, если вся область $A \backslash P$ покрыта кругами, центры кругов располагаются внутри области A, но ни один центр круга не располагается внутри множества P [5].

2. Методы решения

Для решения рассматриваемых задач исследовались следующие методы: простейшие эвристические алгоритмы типа «первый подходящий» и алгоритм случайного поиска для построения начальных приближений, стохастические методы с адаптацией для расширенного поиска: метод частиц, метод роя пчел, метод имитации отжига, генетический алгоритм, самонастраивающийся генетический алгоритм, метод муравьиных колоний, метод вороньей стаи и др. Методы обладают большой степенью универсальности и являются методологической основой для построения конструктивных вычислительных схем решения конкретных прикладных задач, разработки специальных алгоритмических процедур. В частности, был разработан самонастраивающийся генетический алгоритм, который включает автоматический подбор части параметров в процессе работы алгоритма. Для этого в процессе поиска решения отслеживается, какой тип селекции (уровень мутации, элитизма и др. параметры) позволяет получать решения с лучшими значениями критерия оптимальности. В дальнейшем эти значения параметров применяются с большей вероятностью. Такой подход позволяет значительно упростить сложную процедуру подборки параметров и повысить эффективность стохастического алгоритма.

Заключение

Для исследования рассматриваемых алгоритмов создано программное обеспечение, которое позволяет тестировать алгоритмы на случайных выборках, а также на создаваемых пользователем объектах, получать реальные значения по выборке, предоставлять результаты в графическом виде, экспортировать их, настраивать параметры алгоритмов. Проведены многочисленные вычислительные эксперименты на модельных задачах и реальных проектах систем видеонаблюдения и агротехнических систем полива. Разработан эффективный целочисленный способ кодирования геометрических объектов и решений, позволяющий достаточно быстро обрабатывать решение, производить с ним необходимые для каждого конкретного алгоритма оптимизации. Полученные результаты могут быть применены в исследовательских целях, а также в области проектирования систем видеонаблюдения, агротехнических систем полива и др.

Библиография

.

1. *Валиахметова Ю. И., Филиппова А. С.* Теория оптимального использования ресурсов Л. В. Канторовича в задачах раскроя-упаковки: обзор и история развития методов решения. Вестник УГАТУ. 2014. Т. 18, № 1 (62). – С. 186–197.

2. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В*. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. Киев: Наукова думка, 1986. 268 с.

3. *Tozoni, D. C., de Rezende, P. J., de Souza, C. C.* Practical Iterative Algorithm for the Art Gallery Problem using Integer Linear Programming. ACM Transactions on Mathematical SoftwareVolume 43Issue 2Article No.: 16. pp 1–27. URL: https://doi.org/10.1145/2890491.

4. АКВАБАЛАНС. Проекты 2005-2022 года: [Электронный ресурс]. URL: https://www.aquabalance.ru/aboutus/. (Дата обращения 14.03.2023).

5. *Тырин Г. Н., Фроловский В.Д.* Исследование и применение вороньего алгоритма поиска для задач оптимизации геометрического покрытия. Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации. – 2021. – № 1 (50). – С. 54–61.

Bibliography

1. *Valiakhmetova Yu. I., Filippova A. S.* Kantorovich's theory of optimal use of resources in cutting-packing problems: review and history of development of solution methods. UGATU Herald. 2014. vol. 18, No. 1 (62). pp. 186–197 p.

2. *Stoyan Yu.G., Yakovlev S.V.* Mathematical models and optimization methods of geometric design. Kiev: Naukova dumka, 1986. 268 p.

3. *Tozoni, D. C., de Rezende, P. J., de Souza, C. C.* Practical Iterative Algorithm for the Art Gallery Problem using Integer Linear Programming. ACM Transactions on Mathematical SoftwareVolume 43Issue 2Article No.: 16. pp. 1–27. URL: https://doi.org/10.1145/2890491.

4. AQUABALANCE. Projects 2005-2022. URL: https://www.aquabalance.ru/aboutus / (accessed: 14.03.2023).

5. *Tyrin G. N., Frolovskiy V.D.* Research and application of the crow search algorithm for optimization problems of geometric coverage. Reports of the Academy of Sciences of the Higher School of the Russian Federation. – 2021. – № 1 (50). pp. 54-61.

УДК 517.538.2 : 514.17 : 517.518.244

DOI 10.53980/9785907599970_216

АППРОКСИМАЦИЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ, СМЕШАННЫЕ ПЛОЩАДИ И ДЕФЕКТ ВЫПУКЛОСТИ ДУГИ ИЛИ КРИВОЙ В НАПРАВЛЕНИИ*

Хабибуллин Б.Н.*

**Институт математики с вычислительным центром — обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Россия, Уфа, khabib-bulat@mail.ru*

Рассматриваются два направления исследования аппроксимативных свойств экспоненциальных систем с комплексных показателей. Первое — условия полноты таких систем в банаховых пространствах функций, непрерывных на компакте и голоморфных внутри его, а также в пространствах голоморфных функций в областях комплексной плоскости в различных топологиях. В этом случае будут использованы смешанные площади для выпуклых множеств. Второе — устойчивость и избытки полноты этих систем в пространствах функций на компактах или дугах. Здесь ключевую роль будет играть дефект выпуклости замкнутой кривой или дуги в направлении.

Ключевые слова: *полнота экспоненциальная система, целая функция экспоненциального типа, распределение корней, смешанная площадь, опорная функция, выпуклость, избыток экспоненциальной системы, дефект выпуклости в направлении.*

APPROXIMATION BY EXPONENTIAL SYSTEMS, MIXED AREAS AND DEFECT OF CONVEXITY OF AN ARC OR CURVE IN THE DIRECTION

Khabibullin B.N.*

**Institute of Mathematics with Computing Centre — Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Russia, Ufa, khabib-bulat@mail.ru*

We consider two directions of research of approximative properties of exponential systems with complex exponents. The first is the completeness conditions of such systems in Banach spaces of functions continuous on a compact and holomorphic inside it, as well as in spaces of holomorphic functions in domains of the complex plane in various topologies. In this case, we use mixed areas for convex sets. The second is the stability and excess completeness of these systems in the spaces of functions on compacts or on arcs. Here, the defect of the convexity for curve or arc in the direction will play a key role.

Key words*: completeness of exponential system, entire function of exponential type, distribution of zeros, mixed area, support function, convexity, excess of exponential system, defect of convexity in the direction.*

1. Первая задача. Условия полноты экспоненциальной системы

Система векторов из топологического векторного пространства *полна* в нём, если замыкание линейной оболочки этой системы совпадает с этим пространством. Для *распределения точек* Z на *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ с обозначением $Z(z)$ для числа вхождений точки $z\in\mathbb{C}$ в Z мы обсуждаем далее вопросы полноты лишь для *экспоненциальных систем*

$$\operatorname{Exp}^Z := \left\{ w\to w^{p-1}e^{zw} \,\middle|\, 1\le p\le Z(z),\, p\in\mathbb{N}:=\{1,2,...\},\, z\in Z \right\} \tag{1}$$

с *распределением показателей* Z. Распределения точек или показателей Z всегда предполагаются *локально конечными* в том смысле, что число точек из Z конечно в каждом замкнутом круге $\bar{D}(r)$ с центром радиуса $r\in\mathbb{R}^+:=[0,+\infty)\subset\mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ —*вещественная ось* в $\mathbb{C}$.

Вопросы полноты экспоненциальных систем Exp^Z здесь обсуждаются лишь для пространств комплекснозначных функций f, непрерывных на компакте $S\subset\mathbb{C}$ и одновременно голоморфных в его внутренности $\operatorname{int}S\subset S$, если эта внутренность $\operatorname{int}S$ непустая. Такие банаховы пространства с

*Исследование выполнено за счёт гранта РНФ № 22-21-00026, https://rscf.ru/project/22-21-00026/

нормой $\| f \|_S := \sup\{| f(z)| \, z \in S\}$ обозначаем через $C(S) \bigcap \mathrm{Hol}(S)$. Таким образом, если внутреность $\mathrm{int}\, S$ пустая, то это просто банахово пространство всех непрерывных на S функций.

Первая задача — построить шкалу условий, при которых экспоненциальная система Exp^Z полна в пространстве $C(S) \bigcap \mathrm{Hol}(S)$. Естественно требовать, чтобы эти условия выражались в терминах распределения показателей Z с одной стороны и геометрических характеристик компакта $S \subset \mathbb{C}$ с другой. Легко видеть, что условия полноты не зависят от сдвига компакта S. Наиболее естественные геометрические характеристики, во всяком случае для выпуклых компактов $S \subset \mathbb{C}$, не зависящие от сдвигов, — смешанные площади с S. Частными проявлениями смешанных площадей являются такие характеристики, как *длина границы* ∂S, или *периметр* $\mathrm{prm}(\partial S)$; *евклидова площадь* $\mathrm{area}(S)$; *ширина в направлении* $\theta \in \mathbb{R}$, обозначаемая нами как $\mathrm{brd}_S(\theta)$ и определяемая как наименьшая возможная ширина замкнутой полосы в $\mathbb{C}$, содержащей S и прямую, параллельную прямой $\{te^{i\theta} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$; *широта*, или *толщина* компакта $S \subset \mathbb{C}$, а также его *диаметр,* равные соответственно наименьшей, а также наибольшей ширине по всем направлениям $\theta \in \mathbb{R}$, а именно:

$$\mathrm{wid}(S) := \inf\{\mathrm{brd}_S(\theta) \,|\, \theta \in \mathbb{R}\}, \qquad \mathrm{diam}(S) := \sup\{\mathrm{brd}_S(\theta) \,|\, \theta \in \mathbb{R}\}. \tag{2}$$

Смешанная площадь двух выпуклых компактов $S \subset \mathbb{C}$ и $K \subset \mathbb{C}$ может быть определена как

$$\mathrm{area}(S,K) := 2 \times \mathrm{area}\left(\frac{1}{2}S + \frac{1}{2}K\right) - \frac{1}{2}\left(\mathrm{area}(S) + \mathrm{area}(\mathrm{K})\right).$$

Если воспользоваться *выпуклой оболочкой* $\mathrm{conv}\, S$ и *замыканием* $\mathrm{clos}\, S$ множества $S \subset \mathbb{C}$, то для непустых *произвольных ограниченных множеств* $S \subset \mathbb{C}$ и $K \subset \mathbb{C}$ можем определить

$$\mathrm{area}(S,K) := \mathrm{area}(\mathrm{clos\ conv}\, S, \mathrm{clos\ conv\ K}) \in \mathbb{R}^+, \quad S \subset \mathbb{C},\ K \subset \mathbb{C}.$$

2. Основные результаты по первой задаче

Для $S \subset \mathbb{C}$ *опорная* 2π*-периодическая функция* $\mathrm{spf}_S(\theta) := \sup\{\mathrm{Re}\, se^{i\theta} \,|\, s \in S\}$ определена при $\theta \in \mathbb{R}$ значениями из $\mathbb{R} \bigcup \{\pm\infty\}$. Она принимает значения в $\mathbb{R}$, если S непустое и ограниченное.

Для распределения точек Z на $\mathbb{C}$ и 2π-периодической функции $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ определим *считающую функцию* $Z_p^{\mathrm{rad}} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \bigcup \{+\infty\}$ *для* Z *с весом* p *по аргументам* как сумму

$$Z_p^{\mathrm{rad}}(r) := Z(0) \| p \|_{\mathbb{R}} + \sum_{z \in Z \cap \overline{D}(r)} p(\arg z), \quad r \in \mathbb{R}^+.$$

Теорема 1 (развитие результатов из [1]–[5]). *Пусть* Z *— распределение точек на* $\mathbb{C}$, $S \subset \mathbb{C}$ *— непустой компакт со связным дополнением* $\{z \in \mathbb{C} \,|\, z \notin S\}$ *до* $\mathbb{C}$ *и с зеркально симметричным ему относительно* $\mathbb{R}$ *компактом* S^*, $0 < r_0 \in \mathbb{R}^+$, $f : [r_0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ *— выпуклая ограниченная функция.*

Если подмножеств $K \subset \mathbb{C}$ *ограничено,* $0 \in \mathrm{clos\ conv\ K}$ *и выполнено соотношение*

$$\sup_{r_0 \le r < R < +\infty} \left(\int_r^R Z^{\mathrm{rad}}_{\mathrm{spf}_K}(t) f\left(t^2\right) \frac{\mathrm{d}t}{t^2} - \frac{\mathrm{area}(S^*, K)}{2\pi} \int_r^R f\left(t^2\right) \frac{\mathrm{d}t}{t} \right) = +\infty,$$

то экспоненциальная система Exp^Z *из* (1) *полна в пространстве* $C(S) \bigcap \mathrm{Hol}(S)$.

Новые на 2023 г. и следующие следствия, в которых Z, S, $0 < r_0 \in \mathbb{R}^+$ и f те же, что и в теореме 1.

Следствие 1. *Если* $\mathrm{prm}(\partial\, \mathrm{conv}\, S) \le P \in \mathbb{R}^+$ *и* $\sup\limits_{r_0 \le r < R < +\infty} \left(\int_r^R Z_1^{\mathrm{rad}}(t) f\left(t^2\right) \frac{\mathrm{d}t}{t^2} - \frac{P}{2\pi} \int_r^R f\left(t^2\right) \frac{\mathrm{d}t}{t} \right) = +\infty$,

то экспоненциальная система Exp^Z *из* (1) *полна в пространстве* $C(S) \bigcap \mathrm{Hol}(S)$.

Следствие 2. *Если* $s \in \mathrm{clos\ conv\ S}^*$ *и* $\sup\limits_{r_0 \le r < R < +\infty} \left(\int_r^R Z^{\mathrm{rad}}_{\mathrm{spf}_{S^* - s}}(t) f\left(t^2\right) \frac{\mathrm{d}t}{t^2} - \frac{\mathrm{area}(S)}{2\pi} \int_r^R f\left(t^2\right) \frac{\mathrm{d}t}{t} \right) = +\infty$,

то экспоненциальная система Exp^Z *из* (1) *полна в пространстве* $C(S) \bigcap \mathrm{Hol}(S)$.

Аналогичные условия полноты системы Exp^Z из (1) в пространстве $C(S)\bigcap \mathrm{Hol}(S)$ вплоть до критериального уровня можно получить на основе статьи [5], принятой к печати в 2023 году, в терминах ширины $\mathrm{brd}_S(\theta)$ в направлении $\theta\in\mathbb{R}$, широты, или толщины, $\mathrm{wid}(S)$ из (2), а также диаметра $\mathrm{diam}(S)$. Формулировки этих критериев уже требуют некоторых дополнительных определений и значительной подготовки. Поэтому здесь мы опускаем эти формулировки.

3. Вторая задача. Устойчивость и избыток полноты экспоненциальной системы

В этом пункте рассматриваем неограниченную последовательность $Z=(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ на $\mathbb{C}$, и другую последовательность $W=(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ на $\mathbb{C}$ вместе с экспоненциальной системой Exp^W как в (1).

Теорема 2 ([6]–[8], [4]). *Если* $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}}|z_j-w_j|<+\infty$, *то для любого непустого выпуклого компакта* $S\subset\mathbb{C}$ *системы* Exp^Z *и* Exp^W *могут быть полны в* $C(S)\bigcap\mathrm{Hol}(S)$ *только одновременно.*

Гораздо более тонкие результаты получены нами же в начале 2000-х гг. на снове введенного в [7]–[8] понятия дефекта выпуклости жордановой спрямляемой замкнутой кривой или дуги. Это понятие тесно связано с геометрией этой кривой или дуги. Формулировки этих результатов вместе с определениями избытка или недостатка полноты системы Exp^Z в $C(S)\bigcap\mathrm{Hol}(S)$ требуют некоторой подготовки и здесь не приводятся. Предполагается обсуждение развития этих результатов для различных классических функциональных пространств на компактах или областях $S\subset\mathbb{C}$.

Библиография

1. *Хабибуллин Б.Н.* Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной // Известия АН СССР. Серия математическая. 1991. – Т. 55, № 5. – С. 1101–1123.

2. *Хабибуллин Б.Н.* Теорема единственности для субгармонических функций конечного порядка // Математический сборник. 1991. – Т. 182, № 6. – 811–827.

3. *Хабибуллин Б.Н.* Полнота систем целых функций в пространствах голоморфных функций // Математические заметки. 1999. – Т. 66, № 4. – С. 603–616.

4. *Хабибуллин Б.Н.* Полнота систем экспонент и множества единственности. Монография-обзор, издание четвёртое дополненное. Уфа: РИЦ БашГУ, 2012. – xvi+176 с., ISBN: 978-5-7477-2992-6.
https://matem.anrb.ru/sites/default/files/userfiles/u35721/expkhbn.pdf

5. *Хабибуллин Б.Н.* Распределения корней и масс целых и субгармонических функций с ограничениями на их рост вдоль полосы // Известия АН СССР. Серия математическая. 2023. – 61 стр. (принято к печати).

6. *Хабибуллин Б.Н.* Устойчивость полноты экспоненциальных систем на выпуклых компактах в $\mathbb{C}$ // Математические заметки. 2002. – Т. 72, № 4. – 587–596.

7. *Хабибуллин Б.Н.* Избытки систем экспонент в области и дефект выпуклости кривой в направлении // Алгебра и анализ. 2001. – Т. 13, № 6. – С. 193–236.

8. *Хабибуллин Б.Н.* Избытки систем экспонент. II. Пространства функций на дугах // Алгебра и анализ. 2002. – Т. 14, № 4. – 196–228.

Bibliography

1. *Khabibullin B.N.* Sets of uniqueness in spaces of entire functions of a single variable // Math. USSR-Izv. 1992. – Vol. 39, No. 2. – P. 1063–1084.

2. *Khabibullin B.N.* A uniqueness theorem for subharmonic functions of finite order // Math. USSR-Sb. 1992. – Vol. 73, No. 1. – 195–210.

3. *Khabibullin B.N.* Completeness of systems of entire functions in spaces of holomorphic functions // Math. Notes. 1999. – Vol. 66, № 4. – P. 495–506.

4. *Khabibullin B.N.* Completeness of exponential systems and sets of uniqueness, Treatise-survey. 4th Edition, Revised. Ufa: Publishing center of Bashkir State University, 2012, xvi+176 pp., ISBN: 978-5-7477-2992-6. http://www.researchgate.net/publication/271841461

5. *Khabibullin B.N.* Distributions of zeros and masses of entire and subharmonic functions with restrictions on their growth along the strip // Izv. RAN. Ser. Mat. 2023. – 61 pp. (to appear)

6. *Khabibullin B.N.* Stability of Completeness for Systems of Exponentials on Compact Convex Sets in $\mathbb{C}$ // Math. Notes. 2002. Vol. 72, No. 4. – P. 542–550.

7. *Khabibullin B.N.* Excess of systems of exponentials in a domain, and directional convexity deficiency of a curve // St. Petersburg Math. J. 2002. – Vol. 13, No. 6. – P. 1047–1080.

8. *Khabibullin B.N.* Excess of systems of exponentials. II. Function spaces on arcs // St. Petersburg Math. J. 2003. – Vol. 14, No. 4. – P. 683–704.

УДК 519.62, 519.63

DOI 10.53980/9785907599970_220

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПРИКРЕПЛЕННОГО К ДВУМ УПРУГИМ СТЕРЖНЯМ

Хамханов А. К.[*], Мижидон А.Д.[**]

[*]*Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ*
msdos147@gmail.com

[**]*Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ*
miarsdu@mail.ru

Рассматривается построение математической модели для одного класса механических систем, состоящих из твердых тел, прикрепленных к двум балкам Эйлера-Бернулли посредством пружин. Для вывода уравнений динамики использовался вариационный принцип Гамильтона-Остроградского. Полученная модель, представляет собой гибридную систему дифференциальных уравнений. Получено представление для решений вспомогательной алгебраическо-дифференциальной системы уравнений, используемых для дальнейшего исследования частот.

Ключевые слова: *системы с сосредоточенными и распределенными параметрами, балка Эйлера-Бернулли, гибридная система дифференциальных уравнений.*

MATHEMATICAL MODEL OF A MECHANICAL SYSTEM CONSISTING OF A SOLID BODY ATTACHED TO TWO ELASTIC RODS

Hamhanov A. K.[*], Mizhidon A.D.[**]

[*]*East Siberian State University of Technology and Management, Ulan-Ude*
msdos147@gmail.com

[**]*East Siberian State University of Technology and Management, Ulan-Ude*
miarsdu@mail.ru

The paper considers the construction of a mathematical model for a mechanical system, which is a rigid body attached to two Euler-Bernoulli beams. Dynamic equations were obtained using the variational principle of Hamilton-Ostrogradsky. The mathematical model is a hybrid system of differential equations, for which the possibility of using a unified approach to the study of free vibrations, proposed in the study of systems of solids attached to one rod, is discussed.

Key words: *rigid body, Euler-Bernoulli beam, hybrid system of differential equations.*

Введение

Математические модели, содержащие сосредоточенные и распределенные параметрами, являются малоизученными. Подобные модели возникают, например при изучении механических систем, состоящих их твердых тел, соединенные упругими связями со стержнями. Применение вариационного принципа Гамильтона-Остроградского для вывода уравнений динамики обусловлено тем, что он применим для систем с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами. В силу применения данного подхода мы сталкиваемся с систем дифференциальных уравнений, которые состоят из уравнений в частных производных и обыкновенных дифференциальных, далее будем называть их гибридными (ГСДУ).

Случаи, соединения твердых тел с одними стрежнем достаточно подробно исследованы в работе [1].

В работе [2] были выработаны теоретические основы для исследования данного класса гибридных систем. В работе [3] был представлен единый подход исследования собственных колебаний путем построения обобщенных математических моделей применительно к механическим систем, состоящим из систем твердых тел, закрепленных на балке Эйлера-Бернулли.

В работе [4] рассматривается математическая модель системы тел закрепленных на двух балках Эйлера-Бернулли для последующего исследования возможности обобщения полученных результатов.

1. Постановка задачи

Пусть дана механическая система – тело, упруго прикрепленное к двум балкам Эйлера-Бернулли с помощью пружин. Тело может перемещаться поступательно по вертикали и совершать угловые отклонения φ. Требуется получить математическую модель и получить решения для вспомогательной алгебраическо-дифференциальной системы уравнений, на основе которых проводятся дальнейшие исследования собственных частот.

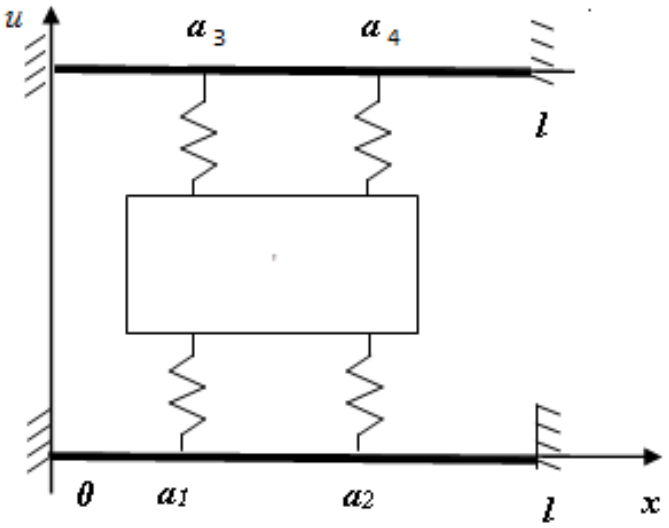


Рисунок 1

2. Результаты исследований

В ходе исследования была получена модель механической системы, описываемая гибридной системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \ddot{z}_0 + p_1^{\,2}\left(z_0 + z_1' - d_1\varphi - u_1\left(a_1,t\right)\right) + p_2^{\,2}\left(z_0 + z_2' + d_2\varphi - u_1\left(a_2,t\right)\right) + \\ + p_3^{\,2}\left(z_0 + z_3' - d_3\varphi - u_2\left(a_3,t\right)\right) + p_4^{\,2}\left(z_0 + z_4' + d_4\varphi - u_2\left(a_4,t\right)\right) = 0, \\ \ddot{\varphi} - q_1^{\,2}\left(z_0 + z_1' - d_1\varphi - u_1\left(a_1,t\right)\right) + q_2^{\,2}\left(z_0 + z_2' + d_2\varphi - u_1\left(a_2,t\right)\right) - \\ - q_3^{\,2}\left(z_0 + z_3' - d_3\varphi - u_2\left(a_3,t\right)\right) + q_4^{\,2}\left(z_0 + z_4' + d_4\varphi - u_2\left(a_4,t\right)\right) = 0, \\ \dfrac{d^2u_1}{dt^2} + b\dfrac{d^4u_1}{dt^4} = e_1\left(z_0 + z_1' - d_1\varphi - u_1\left(a_1,t\right)\right)\delta\left(x - a_1\right) + \\ + e_2\left(z_0 + z_2' + d_2\varphi - u_1\left(a_2,t\right)\right)\delta\left(x - a_2\right) \\ \dfrac{d^2u_2}{dt^2} + b\dfrac{d^4u_2}{dt^4} = e_3\left(z_0 + z_3' - d_3\varphi - u_2\left(a_3,t\right)\right)\delta\left(x - a_3\right) + \\ + e_4\left(z_0 + z_4' + d_4\varphi - u_2\left(a_4,t\right)\right)\delta\left(x - a_4\right), \end{cases} \tag{1}$$

Для дальнейшего исследования собственных частот произведена замена переменных

$$z_0 = A\sin(\omega t), \qquad \varphi = A_\varphi \sin(\omega t),$$

$$u_1\left(x,t\right) = V_1\left(x\right)\sin\left(\omega t\right), \qquad u_2\left(x,t\right) = V_2\left(x\right)\sin\left(\omega t\right),$$

И получена алгебраическо-дифференциальная система уравнений:

$$\begin{cases} -\omega^2 A + p_1^2(A + z_1' - d_1 A_\varphi - V_1(a_1)) + p_2^2(A + z_2' + d_2 A_\varphi - V_1(a_2)) + \\ + p_3^2(A + z_3' - d_3 A_\varphi - V_2(a_3)) + p_4^2(A + z_1' + d_4 A_\varphi - V_2(a_4)) = 0, \\ -\omega^2 A_\varphi - q_1^2(A + z_1' - d_1 A_\varphi - V_1(a_1)) + q_2^2(A + z_2' + d_2 A_\varphi - V_1(a_2)) - \\ - q_3^2(A + z_3' - d_3 A_\varphi - V_2(a_3)) + q_4^2(A + z_4' + d_4 A_\varphi - V_2(a_4)) = 0, \\ -\omega^2 V_1(x) + b\dfrac{d^4 V_1(x)}{dx^4} = e_1(A + z_1' - d_1 A_\varphi - V_1(x))\delta(x - a_1) + \\ + e_2(A + z_2' + d_2 A_\varphi - V_1(x))\delta(x - a_2) \\ -\omega^2 V_2(x) + b\dfrac{d^4 V_2(x)}{dx^4} = e_3(A + z_3' - d_3 A_\varphi - V_2(x))\delta(x - a_3) + \\ + e_4(A + z_4' + d_4 A_\varphi - V_2(x))\delta(x - a_4) \end{cases} \quad (2)$$

Для решения данной системы имеет место следующее представление:

$$\begin{aligned} V_1(x) &= G_1(x - a_1)\cdot e_1(A + z_1' - d_1 A_\varphi - V_1(a_1)) + \\ &+ G_2(x - a_2)\cdot e_2(A + z_2' + d_2 A_\varphi - V_1(a_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2(x) &= G_3(x - a_3)\cdot e_3(A + z_3' - d_3 A_\varphi - V_2(a_3)) + \\ &+ G_4(x - a_4)\cdot e_4(A + z_4' + d_4 A_\varphi - V_2(a_4)) \end{aligned} \quad (3)$$

где $G_i(x)$ – обобщенные решения уравнений

$$-\omega^2 G_i(x) + b\frac{d^4 G_i(x)}{dx^4} = \delta(x), \ \ i = 1,..4$$

Подставляя в (3) последовательно $x = a_1, x = a_2, x = a_3, x = a_4$, получим

$$\begin{cases} V_1(a_1) = G_1(0)\cdot e_1(A + z_1' - d_1 A_\varphi - V_1(a_1)) + G_2(a_1 - a_2)\cdot e_2(A + z_2' + d_2 A_\varphi - V_1(a_2)) \\ V_1(a_2) = G_1(a_2 - a_1)\cdot e_1(A + z_1' - d_1 A_\varphi - V_1(a_1)) + G_2(0)\cdot e_2(A + z_2' + d_2 A_\varphi - V_1(a_2)) \\ V_2(a_3) = G_3(0)\cdot e_3(A + z_3' - d_3 A_\varphi - V_2(a_3)) + G_4(a_3 - a_4)\cdot e_4(A + z_4' + d_4 A_\varphi - V_2(a_4)) \\ V_2(a_4) = G_3(a_4 - a_3)\cdot e_3(A + z_3' - d_3 A_\varphi - V_2(a_3)) + G_4(0)\cdot e_4(A + z_4' + d_4 A_\varphi - V_2(a_4)) \end{cases} \quad (4)$$

Путем преобразования (4) получим $V_1(a_1), V_1(a_2), V_2(a_3), V_2(a_4)$ и подставив их в (2) можно получить значения амплитуд колебаний A, A_φ, вычисленные относительно частоты ω

Заключение

В работе была получена математическая модель для механической системы, закрепленной на двух балках. Получено представление для решений вспомогательной алгебраическо-дифференциальную систему уравнений, на основе которых проводятся аналитико-численные исследования собственных частот.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта «Молодые ученые ВСГУТУ-2023» по теме «Алгоритмическое и программное обеспечение автоматизации построения обобщенной математической модели для одного класса механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами»

Библиография

1. Мижидон А.Д., Мижидон К.А. Собственные значения для одной системы гибридных дифференциальных уравнений // Сибирские электронные математические известия. 2016. Т. 13. С. 911-922.

2. Мижидон А. Д. Теоретические основы исследования одного класса гибридных систем дифференциальных уравнений // Математический анализ, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее

прил. Темат. обз. 2018. Т. 155. С. 38–64.

3. Мижидон А.Д. Гибридные системы дифференциальных уравнений в приложении к исследованию одного класса механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Т. 1: Общая и прикладная механика.— Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. С. 21-23

4. Мижидон А. Д., Хамханов А. К. Гибридная система дифференциальных уравнений, описывающая твердое тело, прикрепленное к двум упругим стержням // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2022. № 4. С. 38–47.

Bibliography

1. Mizhidon A.D., Mizhidon K.A. Sobsvennye znachenija dlja odnoj sistemy gibridnyh differencial'nih uravnenii [Eigenvalues of boundary value problem for a hybrid system of differential equations] // *Sibirskie electronnie matematicheskie izvestiya – Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2016. V. 13. Pp. 911-922.

2. Mizhidon A.D. Teoreticheskiye osnovy issledovaniya odnogo klassa gibridnykh sistem differentsial'nykh uravneniy [Theoretical bases for research of a class of hybrid systems of differential equations] // *Matematicheskiy analiz, Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i yeye pril. Temat. obz.* 2018. V. 155. Pp. 38-64.

3. Mizhidon A.D. Hybrid systems of differential equations in application to the study of one class of mechanical systems with lumped and distributed parameters // XII All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics: a collection of works in 4 volumes. Vol. 1: General and applied mechanics. - Ufa: RIC BashGU, 2019. P. 21-23

4. Mizhidon A. D., Hamhanov A. K. Hybrid system of differential equations describing a rigid body attached to two elastic rods // Bulletin of the Buryat State University. Mathematics, computer science. 2022. No. 4. S. 38–47.

УДК 517.95; 532.5

DOI 10.53980/9785907599970_224

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ПО КОЭФФИЦИЕНТУ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СМЕШАННОГО УРАВНЕНИЯ ИНТЕГРО-ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМ МЕТОДОМ С ТРЕТЬИМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ*

Ханхасаев В.Н.*, Баиров С.А.**
**Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,*
Бурятский государственный университет,
Россия, Улан-Удэ, hanhvladnick@mail.ru
*** Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,*
Россия, Улан-Удэ, bairov.sofron@gmail.com

Хорошо известно, что обычное уравнение теплопроводности имеет недостаток в том, что тепло может мгновенно распространяться в пространстве. В работах Ханхасаева В.Н., посвященных математическому моделированию процесса отключения электрической дуги в спутном потоке газа, аналитически и численно решались различные математические модели для гиперболического уравнения теплопроводности, получаемого обобщением гипотезы Фурье, которые лишены этого недостатка. Развивая эти исследования, модифицируем математическую модель, заменяя гиперболическое уравнение теплопроводности нелинейным гиперболо-параболическим уравнением в частных производных 2-го порядка, находим численные решения для неё.

Ключевые слова: *гиперболическое уравнение теплопроводности, нелинейные гиперболо-параболические уравнения, метод конечных разностей, метод теплового баланса, третьи краевые условия.*

NONLINEAR SOLUTION OF A MIXED EQUATION INTEGRAL-INTERPOLATION METHOD FOR THE COEFFICIENT OF THERMAL CONDUCTIVITY WITH A THIRD BOUNDARY CONDITION*

V.N. Khanhasayev*, S.A. Bairov**
**East Siberian State University of Technology and Management,*
Buryat State University,
Ulan-Ude, Russia, hanhvladnick@mail.ru
***East Siberian State University of Technology and Management,*
Ulan-Ude, Russia, bairov.sofron@gmail.com

It is well known that the ordinary heat equation has a drawback in that heat can propagate instantly in space. In the works of v.n. khandasayev, which are devoted to the mathematical modeling of the process of disconnecting an electric arc in a choked gas flow, various mathematical models were analytically and numerically solved for a hyperbolic heat conduction equation obtained by generalizing the fourier hypothesis, which is free from this drawback. Developing these studies, we modify the mathematical model, replacing the hyperbolic heat equation with a nonlinear hyperbolic-parabolic equation in partial derivatives of the 2-nd order, and find numerical solutions for it.

Keywords: hyperbolic heat conduction equation, nonlinear hyperbolic-parabolic equations, finite difference method, heat balance method, third boundary conditions.

Введение

Исследование процессов теплопроводности с помощью обобщенного закона Фурье наиболее актуально для быстро протекающих физических явлений (например, для нано- и фемпто-секундных лазерных импульсных воздействий) при исследовании высокоинтенсивных процессов нагрева тел (плазменная, лазерная обработка материалов, высокоинтенсивный нагрев контактных соединений в электрических установках и др.) [1].

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ №23-21-00269, https://rscf.ru/project/23-21-00269/

Заметим, что рассматриваемый эффект конечности скорости распространения теплоты проявляется и в обычных условиях на фронте волны, описывающей распространение возмущения температуры. В частности, передняя часть фронта возмущения моделируется только посредством гиперболического уравнения теплопроводности, которое как раз и описывает распространение тепловых возмущений с конечной скоростью [2].

Использование смешанного уравнения теплопроводности, описывающего распространение возмущений с конечной скоростью, покажет изменения поля температуры с учетом времени релаксации теплового потока [3].

В данной работе рассмотрим задачу распределения температуры в бесконечной пластине с импульсными воздействиями и краевыми условиями третьего рода. Для описания математической модели используем нелинейное гиперболо-параболическое уравнение теплопроводности и применим интегро-интерполяционный метод.

Постановка задачи

Дана неограниченная пластина, размер которой по оси x равен X, а размер по оси y равен $(-\infty;\infty)$. Свойства пластины по оси y считаем однородными и y не будем упоминать в списке переменных. Начальное распределение температуры в пластине задается некоторой функцией $U(x,0)=U_0(x)$, на границах пластины температура среды постоянная $tc1=const$, $tc2=const$. Теплообмен с окружающей средой происходит по закону Ньютона (граничные условия третьего рода). Заданы теплофизические характеристики $c_v, \lambda, \rho, \alpha$ – соответственно удельная теплоемкость, коэффициент теплопроводности, удельная плотность и коэффициент теплопередачи. Требуется найти распределение температуры по толщине пластины в любой момент времени. Начало координат выберем на левой поверхности пластины. Дифференциальное уравнение тогда, начальное и краевые условия запишутся в виде:

$$k(x,t)u_{tt}+c_v(x,t)\cdot\rho(x,t)\cdot u_t=(\lambda(x,t,u)\cdot u_x)_x+c(x,t)u+f(x,t) \quad (1)$$

$$u(x,t)\big|_{t=T1}=u_0(x) \quad (2)$$

$$t\in[T1,T2]:\quad -\lambda(0,t,u)\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}+\alpha_1((tc1-u(0,t))=0; \quad (3)$$

$$\lambda(X,t,u)\frac{\partial u(X,t)}{\partial x}+\alpha_2((tc2-u(X,t))=0; \quad (4)$$

которые рассматриваются в прямоугольной области $G=[0,X]\times[T_1,T_2],\ T_1<0, T_2>0.$ При этом, $a(x,t)=c_v\cdot\rho>0$, $\forall(x,t)\in G$, $\mathrm{k(x,t)}=0$, $\mathrm{t}\le 0; \mathrm{k(x,t)}>0, \mathrm{t}>0;$ т.е. при $\mathrm{t}\le 0$ - уравнение параболическое, а при $\mathrm{t}>0$ –гиперболическое.

Для уравнения с переменными коэффициентами (1), замена производных конечными разностями может привести к схемам, которые будут иметь большую погрешность, либо вообще окажутся непригодными для счета. Поэтому, здесь необходимо использовать консервативные разностные схемы, важным требованием которых является соответствие дифференциальным уравнениям, получаемым на основе записи закона сохранения энергии для произвольного объема сплошной среды [4].

Для непрерывного точного решения закон сохранения выполняется. для произвольной области. Для разностного решения требование выполнения закона сохранения имеет важную особенность, обусловленную дискретным разбиением её. А именно, поскольку разностное решение ищется в отдельных точках тела, то необходимо разбить его на такое же число элементарных объемов, каждый из которых будет включать одну точку дискретного разбиения, а затем потребовать выполнения закона сохранения как для произвольного элементарного объема, так и для любой области, составленной из этих элементарных объемов (следовательно, и для всего тела). Последнее требование будет выполнено, если обеспечить условие согласования для любых соседних объемов, заключающееся в равенстве протекающих через общую границу тепловых потоков [5].

Отметим, что обычно требуют точного выполнения сформулированных условий при конечном разбиении расчетной области, а не только при стремлении максимального размера элементарной ‘области к нулю. Это позволяет получать правдоподобные решения даже на грубых сетках для

неявных схем.

Необходимость решения задач в нелинейной постановке возникает наиболее часто при моделировании процессов, в которых температура изменяется в широком диапазоне. Например, теплопроводность сталей применяемых в конструкциях криогенных систем, изменяется от 1 до 15 Вт/(м·К) в интервале температур от 5К до 300К. Коэффициенты теплоотдачи излучением α могут измениться более чем в 10 раз при изменении температуры поверхности от 20° до 700°.

При решении нелинейных задач аналитическими методами возникают существенные математические трудности, которые требуют разработки специальных методов решения. Причем возможность получения аналитического решения и выбор метода существенным образом зависят от вида нелинейностей в дифференциальном уравнении и в граничных условиях, а также их функциональных описаний. Возможности численного решения нелинейных задач значительно шире. Алгоритмы численного решения таких задач можно достаточно просто построить на основе рассмотренных схем для линейных задач в квазилинейном случае. При этом зависимости коэффициентов от температуры будем задавать нелинейными функциями определенного вида.

Рассмотрим конкретный численный расчет на примере следующей краевой задачи: найти температурное поле в однородной по у бесконечной пластине с $X = \pi$ и интервалом расчета: $T_1 = -5, \quad T_2 = 20.$

Приведем разностную аппроксимацию для уравнения (1), начального (2), краевых условий (3-4) и составим для неё программу численного решения в среде Mathcad-15. Сформулируем задачу со следующими экспериментальными данными [6].

Начальное условие*:*

$$u(x,t)\big|_{t=T1} = u_0 = 10\sin(x) \tag{5}$$

краевые условия*:* $tc1 = 5\,, tc2 = 10\,;$

коэффициенты: $\lambda(u) = 0.1 \cdot u^2 + 2\,.\;\; k = 1, c = 0, a = 672;$

источники тепла: $f1(x,t) = 0,\; f2(x,t) = 100000\sin(x)\sin(t).$

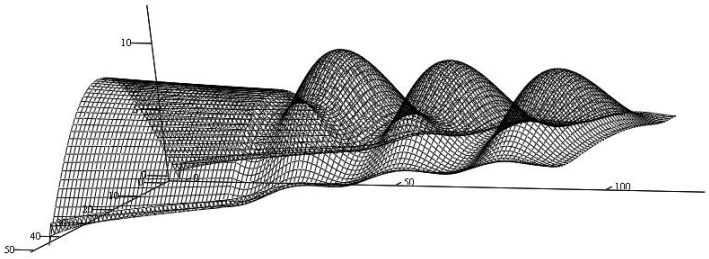


Рисунок 1 – График функции нелинейного уравнения

Заключение

Эта математическая модель достаточно точно описывает процессы, связанные с нагревом бесконечной пластины в нелинейном по коэффициенту теплопроводности случае, при численном решении которого используется метод теплового баланса. В будущем, планируется разработать программу для многослойных пластин и использовать эту модель для решения более физических задач с двумя и тремя пространственными переменными.

Библиография

1. *Ханхасаев В.Н., Дармахеев Э.В.*, “О некоторых применениях гиперболического уравнения теплопроводности и методах его решения”, Математический анализ, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 155, ВИНИТИ РАН, М., 2018, 89–97 с.

2. *Gunter Scharf*, “Approach to steady state in the heat equation and the hyperbolic heat transfer equation” arXiv:1612.08527 [math-ph]

3. *Ханхасаев В. Н., Баиров С. А.*, Численное решение по явной разностной схеме смешанного уравнения теплопроводности со вторыми краевыми условиями // Материалы научной конференции с международным участием, посвященной 90-летию БГПИ-БГУ. – Улан-Удэ, 2022 – С. 132–136.

4. *Дульнев Г.Н., Парфенов В.Г., Сигалов А.В.* Применение ЭВМ для решения задач теплообмена Учебное пособие для теплофизических и теплоэнергетических спец. вузов. – М.: Высшая школа, 1990. – 207 с.

5. *Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю.* Волновые явления теплопроводности: 2-е изд. дополн. 2004. – 298 с.

6. *Ю. Е. Воскобойников* [и др.] ; под ред. Ю. Е. Воскобойникова. Решение инженерных задач в пакете MathCAD : учеб. пособие /; Новосиб. гос. архитектур.-строит. ун-т (Сибстрин). – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2013. – 120 с.

Bibliography

1. *Khanhasaev V.N., Darmakheev E.V.*, "On some applications of the hyperbolic heat conduction equation and methods for its solution", Mathematical analysis, Results of science and technology. Series Modern Mathematics and its Applications, 155, VINITI RAN, Moscow, 2018. P. 89–97.

2. *Gunter Scharf*, "Approach to steady state in the heat equation and the hyperbolic heat transfer equation" arXiv:1612.08527 [math-ph]

3. *Khanhasaev V.N., Bairov S.A.,* Numerical solution of the mixed heat conduction equation with second-order boundary conditions using an explicit difference scheme // Materials of the scientific conference with international participation dedicated to the 90th anniversary of BSPI-BSU. – Ulan-Ude, 2022. – P. 132–136.

4. *Dulnev G.N., Parfenov V.G.,* Sigalov A.V. Application of computers for solving heat transfer problems. Tutorial for thermophysical and thermal power engineering universities. – Moscow: Higher school, 1990. – 207 p.

5. *Shashkov A.G., Bubnov V.A., Yanovskiy S.U.* Wave phenomena of heat conduction: 2-nd ed., updated. 2004. – 298 p.

6. *Yu. E. Voskoboinikov* [et al.]; ed. by Yu. E. Voskoboinikov. Solving engineering problems in the MathCAD package: textbook / Novosibirsk State Architectural and Civil Engineering University (Sibstrin). – Novosibirsk: NSACEU (Sibstrin), 2013. – 120 p.

УДК 517.95; 532.5

DOI 10.53980/9785907599970_228

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Ханхасаев В.Н.*, Жамцаев Н.С.**
**Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,
Бурятский государственный университет,
Россия, Улан-Удэ,* hanhvladnick@mail.ru
*** Бурятский государственный университет,
Россия, Улан-Удэ,* nikita91797@ gmail.com.

В данной работе представлена реализация программного комплекса для решения n-мерных интегралов с помощью метода Монте-Карло. Приводятся принцип работы этого метода и математическое обоснование его сходимости. Аналитически и численно с помощью программного комплекса решен пример нахождения одного трехмерного интеграла. Актуальность работы обусловлена бурным развитием вычислительной техники, т.к. алгоритмы метода Монте-Карло сравнительно легко программируются и распараллеливаются.

Ключевые слова: *метод Монте Карло, кратные интегралы, численные методы, программные комплексы, случайные величины.*

DEVELOPMENT OF A SOFTWARE COMPLEX FOR FINDING MULTIDIMENSIONAL INTEGRALS BY THE MONTE CARLO METHOD

Khanhasayev V.N.*, Zhamtsaev N.S.**
*East Siberian State University of Technology and Management,
Buryat State University, Ulan-Ude, Russia, hanhvladnick@mail.ru
** Buryat State University,
Ulan-Ude, Russia, nikita91797@gmail.com

This paper presents the implementation of a software package for solving n-dimensional integrals using the Monte Carlo method. The operating principle of this method and the mathematical substantiation of its convergence are given. An example of finding one three-dimensional integral was solved analytically and numerically using the software package. The relevance of the work is due to the rapid development of computer technology, because Monte Carlo algorithms are relatively easy to program and parallel.

Key words: *Monte Carlo method, multiple integrals, numerical methods, software packages, random variables.*

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ №23-21-00269, https://rscf.ru/project/23-21-00269/

Введение

Методы Монте-Карло применяются для численного решения математических задач путем моделирования случайных величин. Наиболее важным свойством этих методов является сокращение расчета математических ожиданий задачи. Поскольку математические ожидания чаще всего являются обычными интегралами, центральное положение в теории методов Монте-Карло занимают методы вычисления интегралов [4]. Преимущества стохастических методов особенно очевидны при решении задач больших размерностей, когда использование традиционных аналитических методов затруднительно или полностью невозможно. До появления ЭВМ методы Монте-Карло не могли стать универсальными численными методами, поскольку ручное моделирование случайных величин является очень трудоемким процессом. В ходе работы был сформулирован подробный алгоритм вычисления интегралов с использованием метода Монте-Карло. Для проведения численного эксперимента создан программный комплекс на языке С + +, который с приемлемой точностью вычисляет интеграл любой кратности. Приводятся расчеты тестового примера.

1. Принцип работы метода Монте – Карло

Метод Монте-Карло является статистическим методом. Его используют при вычислении кратных интегралов, при решении систем алгебраических уравнений высокого порядка, при моделировании поведения элементарных частиц, в теориях передачи информации и при исследовании сложных экономических систем.

Суть метода состоит в том, что в задачу вводится случайная величина ξ, которая изменяется по правилу p(ξ). Случайная величина выбирается так, чтобы искомое в задаче значение A становилось математическим ожиданием величины ξ, то есть M (ξ) = A.

Таким образом, искомое значение A определяется только теоретически. Чтобы найти его численно, нужно использовать статистические методы. То есть необходимо взять выборку случайных чисел ξ_i объема N. Затем необходимо вычислить выборочное среднее случайной величины ξ по формуле:

$$\overline{\xi} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{N}$$

Вычисленное выборочное среднее значение берется как приближение к A: $\overline{\xi} \cong A$. Для получения результата с приемлемой точностью требуется множество статистических тестов. Теория Монте-Карло изучает способы выбора случайных величин ξ для решения различных задач, а также способы уменьшения дисперсии случайных величин [5].

2. Применение метода Монте-Карло для вычисления n-мерного интеграла.

Рассмотрим интеграл:

$$I = \int_G f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \qquad (1)$$

Будем считать, что G ограниченная область в R^n, и функцию $f(x)$ возьмем такую, что она ограничена сверху и снизу на множестве G:

$$\exists\ C_1, C_2 \in R: \quad \forall\ x \in G \quad C_1 \le f(x) \le C_2.$$

Воспользуемся ограниченностью области G и впишем ее в некоторый n – мерный параллелепипед K:

$$K = \{x \in R^n \quad | \quad \forall\ i \in 1, \dots, n \quad m_i \le x_i \le M_i\},$$

где $m_i,\ M_i$- минимумы и максимумы i - ой координаты точек множества G:

$$m_i = \min_{\forall x \in G} (x_i), \quad M_i = \max_{\forall x \in G} (x_i).$$

Доопределим подынтегральную функцию $f(x)$ таким образом, чтобы она обращалась в ноль в точках параллелепипеда K, которые не принадлежат G:

$$\forall\ x \in K \quad \hat{f}(x) = \begin{cases} 0 & x \notin G \\ f(x) & x \in G \end{cases}.$$

Интеграл (1) запишется в виде:

$$I = \int_K \hat{f}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n .$$

Обозначим через U n-мерный случайный вектор, имеющий равномерное распределение в параллелепипеде К:

$$U = (u_1, \dots, u_n), \qquad \forall\ i = 1, \dots, n \quad m_i \le u_i \le M_i .$$

Тогда плотность вероятностей $p_U(x)$ случайного вектора U будет такой:

$$p_U(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{n}(M_i - m_i)}, & \text{если } x \in K, \\ 0, & \text{если } x \notin K. \end{cases} \quad (2)$$

Значение подынтегральной функции $\hat{f}$ от случайного вектора U будет случайной величиной $\hat{f}(U)$, математическое ожидание $M\hat{f}(U) = M(\hat{f}(U))$ которой является средним значением функции на множестве K:

$$Mf(U) = \int_K f(u)p_U(x)dx \ .$$

С помощью (2) получаем, что это среднее значение функции на множестве K равняется отношению значения искомого интеграла к объему параллелепипеда K :

$$Mf(U) = \int_K f(u)p_U(x)dx = \frac{I}{\prod_{i=1}^{n}(M_i - m_i)} \ .$$

Обозначим $V(K) = \prod_{i=1}^{n}(M_i - m_i)$ – объем параллелепипеда K.
Тогда, имеем:

$$I = Mf(U) \cdot V(K) \, .$$

Необходимо теперь найти значение математического ожидания $M\hat{f}(U)$. Его приближенное значение можно найти, произведя n испытаний, получив, таким образом, выборку $U_1, \dots, U_n$ случайных векторов, имеющих равномерное распределение на K. Обозначим $Y_i = \hat{f}(U_i)$ и $\mu = M\hat{f}(U)$. Для оценки математического ожидания воспользуемся результатом

$$P = \left(\overline{y} - t\frac{S_y}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{y} + t\frac{S_y}{\sqrt{n}}\right) = \omega$$

где

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \quad , \quad S_y^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{t=1}^{n} Y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2\right),$$

t - квантиль нормального распределения, соответствующий доверительной вероятности ω [4].
Умножив двойное неравенство на $V(K)$, получим интервал для I:

$$\left(\bar{y} - t\frac{S_y}{\sqrt{n}}\right)V(K) \le I \le \left(\bar{y} + t\frac{S_y}{\sqrt{n}}\right)V(K)$$

Обозначим $\hat{I} = \bar{y}V(K)$ точечную оценку I. Получаем оценку (с надежностью ω):

$$|\Delta| = \left|\hat{I} - I\right| \le \frac{tS_y}{\sqrt{n}}V(K) \quad (3)$$

Если задана целевая абсолютная погрешность Δ, можно определить объем выборки, обеспечивающий заданную точность и надежность:

$$n = \left(\frac{V(K)tS_y}{\Delta}\right)^2 \quad (4)$$

Программа реализована на языке программирования C++. Результаты представлены на рисунке 1.

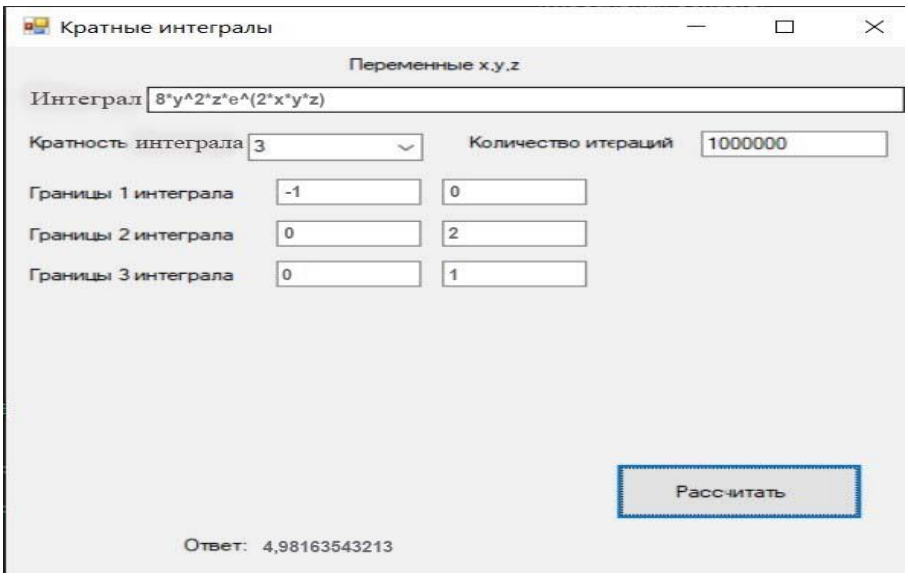


Рисунок 1

Заключение

Данная программа достаточно точно вычисляет многомерные интегралы высокой размерности. В работе приведены теоретические сведения из теории вероятностей и математической статистики для обоснования сходимости метода и был сформулирован подробный алгоритм вычисления интегралов с использованием метода Монте-Карло. Для проведения численного эксперимента, написана программа на языке C++, которая вычисляет многомерный интеграл любой кратности с необходимой точностью.

Библиография

1. Бусленко Н. П., Голенко Д. И., Соболь И. М., Срагович В. Г, Шрейдер., Ю. А. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 332 с.
2. Кибирев, В. В. Элементы математической статистики: Учеб. пособие для вузов по спец. Прикладная математика и информатика / Улан-Удэ : Издательство БГУ, 2011. – 110 с.
3. Кибирев, В. В. Теория вероятностей и математическая статистика: учебно-методический комплекс для студентов специальности Прикладная математика и информатика / Улан-Удэ : Издательство БГУ, 2012. – 130 с.
4. Кибирев, В. В. Метод Монте-Карло. Цепи Маркова и случайные функции / Улан-Удэ : Издательство БГУ, 2009. – 87 с.
5. Михайлов Г.А. Некоторые вопросы теории методов Монте -Карло. — «Наука», Сибирское отделение, 1974 г. – 142 с.
6. Михайлов Г. А. Оптимизация весовых методов Монте-Карло. – М.: Наука, 1987. – 240 с.

Bibliography

1. Buslenko N. P., Golenko D. I., Sobol I. M., Sragovich V. G., Shreider., Yu. A. Method of statistical tests (Monte Carlo method). – State publishing house of physical and mathematical literature, 1962 - 332 p.
2. Kibirev V.V. Elements of mathematical statistics: Proc. allowance for universities on special. Applied Mathematics and Informatics / Ulan-Ude: BSU Publishing House, 2011. – 110 p.
3. Kibirev, V. V. Probability theory and mathematical statistics: educational and methodological complex for students of the specialty Applied Mathematics and Informatics / Ulan-Ude: BSU Publishing House, 2012. – 130 p.
4. Kibirev V.V. Monte Carlo method. Markov chains and random functions / Ulan-Ude: BSU Publishing House, 2009. – 87 p.

5. Mikhailov G.A. Some questions in the theory of Monte Carlo methods. - "Nauka", Siberian branch, 1974 - 142 p.
6. Mikhailov G.A. Optimization of Weighted Monte Carlo Methods. – M.: Nauka, 1987 – 240 p.

УДК 533, 519.6

DOI 10.53980/9785907599970_233

ТРЕХМЕРНОЕ ОБТЕКАНИЕ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА СЛОЖНОЙ ФОРМЫ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УГЛАХ АТАКИ И НАЛИЧИИ ЭНЕРГОИСТОЧНИКА*

Ханхасаева Я.В.*, Луцкий А.Е.**

** Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва*

hanhyana@mail.ru

*** Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва*

allutsky@yandex.ru

В рамках осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (URANS) и модели турбулентности Спаларта-Аллмараса (SA) проведено исследование свойств течения, возникающем при сверхзвуковом обтекании модели летательного аппарата сложной формы неоднородным за счет энерговложения потоком вязкого теплопроводного газа. Определено влияние угла атаки, параметров и параметров источника на различные характеристики течения.

Ключевые слова: *вложение энергии, вязкий теплопроводный газ, ударная волна, тепловой поток, математическое моделирование.*

3D FLOW PAST AN AIRCRAFT MODEL WITH ENERGY INPUT AT VARIOUS ANGLES OF ATTACK

Khankhasaeva Ya.V.*, Lutsky A.E.**

** Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow*

hanhyana@mail.ru

*** Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow*

allutsky@yandex.ru

Supersonic non-uniform (due to energy input) flow of a viscous heat-conducting gas past a complex aircraft model was numerical investigated using the unsteady Reynolds averaged Navier-Stokes equations (URANS) and Spalart-Allmaras (SA) turbulence models. Influence of attack angle and energy input's parameters on various flow characteristics was determined.

Key words*: energy input, viscous heat-conducting gas, shock wave, heat flux, mathematical modeling.*

Введение

Традиционным способом улучшения аэродинамических характеристик летательного аппарата является оптимизация его формы. Для некоторых объектов возможности такого подхода в значительной степени исчерпаны. Однако существуют и альтернативные методы, которые направлены на изменение характеристик газового потока в окрестности поверхности ЛА. Одним из таких способов является вложение энергии в небольшую область перед летательным аппаратом, что за счет перестройки течения позволяет существенно улучшить его аэродинамические характеристики. Данный вариант воздействия на обтекание летательных аппаратов в отечественной литературе впервые был предложен в [1]. За областью энерговклада формируется тепловой след с пониженными значениями чисел Маха, полного давления и скоростного напора, что обеспечивает неравномерность набегающего потока. Благодаря этому ударно-волновая структура перед телом перестраивается таким образом, что его сопротивление существенно снижается. При этом сэкономленная за счет снижения сопротивления мощность двигателя превышает затраты на энерговложение.

В большинстве существующих работ эффект энерговложения рассматривался на примере тел довольно простой формы (сфера, конус, цилиндр, крыловые профили), т.е. отдельных элементов конструкции ЛА. Актуальным же является исследование комплексного влияния энерговложения на

* Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 22-11-00126.

обтекание ЛА более сложной конструкции. Также в меньшей степени исследованы трехмерные эффекты вложения энергии и результирующие тепловые потоки на поверхности ЛА. В представленной работе основное внимание уделено исследованию влияния вложения энергии на трехмерные режимы обтекания модели ЛА при различных углах атаки и параметров источника, а именно, таких факторов, как мощность источника, расстояние от источника до тела, сдвиг источника относительно тела и форма источника.

1. Постановка задачи

Для описания течений совершенного вязкого сжимаемого газа используется система нестационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (URANS), дополненных источниковым членом в уравнении сохранения энергии. Также используется вариант однопараметрической модели турбулентности Спаларта-Аллмарса (SA) для сжимаемых течений с модификацией Эдвардса.

Рассматриваемая модель представляет собой цилиндр со сферической головной частью, боковыми крыльями и хвостовым оперением (Рис.1). Сетка состояла из 11819520 шестиугольных элементов. Скорость набегающего потока M = 2.5, число Рейнольдса $\mathrm{Re}_\infty = 3 \cdot 10^7$, рассмотренные углы атаки $\alpha = 0,\ 3,\ 5°$. При исследовании теплового потока на поверхности модели задавалось условие охлаждаемой стенки $T_w = 1.125$ (температурный фактор $T_w / T_0 = 0.5$). Предполагается, что энергия вкладывается стационарно и однородно по пространству в область, расположенную перед носовой частью модели.

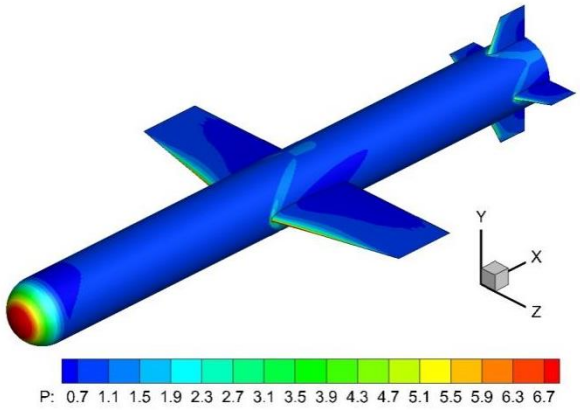


Рисунок 1 – Модель ЛА. Распределение давления при обтекании невозмущенным потоком с числом Маха M = 2.5

2. Результаты исследований

Для наибольшей энергоэффективности лучше вкладывать меньшее количество энергии. Большее количество вложенной энергии дает существенное снижение сопротивления и увеличение аэродинамического качества, но также приведет к более сильным тепловым нагрузкам на поверхность модели.

Расстояние до источника имеет различные эффекты, и оценку того, какое расстояние лучше, необходимо производить из желаемого результата. Более ближнее расположение дает более значимое снижение сопротивления, но также приведет к более высоким тепловым нагрузкам на тело.

С учетом угла атаки, наилучшим выбором с точки зрения энергоэффективности, снижения сопротивления и аэродинамического качества расположения источника будет вариант, когда центр следа попадает на тело наиболее близко к точке торможения. Также наиболее эффективным будет источник с наименьшей площадью поперечного сечения (узкий канал).

Энерговклад как средство снижения сопротивления и увеличения аэродинамического качества с увеличением угла атаки теряет эффективность в рассмотренном диапазоне углов атаки.

Наличие источника энергии приводит к существенному росту теплового потока на всей поверхности модели, за исключением областей крыльев. Эффект увеличения теплового потока ослабляется с отдалением от носа. При ненулевом угле атаки тепловой поток увеличивается только на носовой и части подветренной поверхности, близкой к носу.

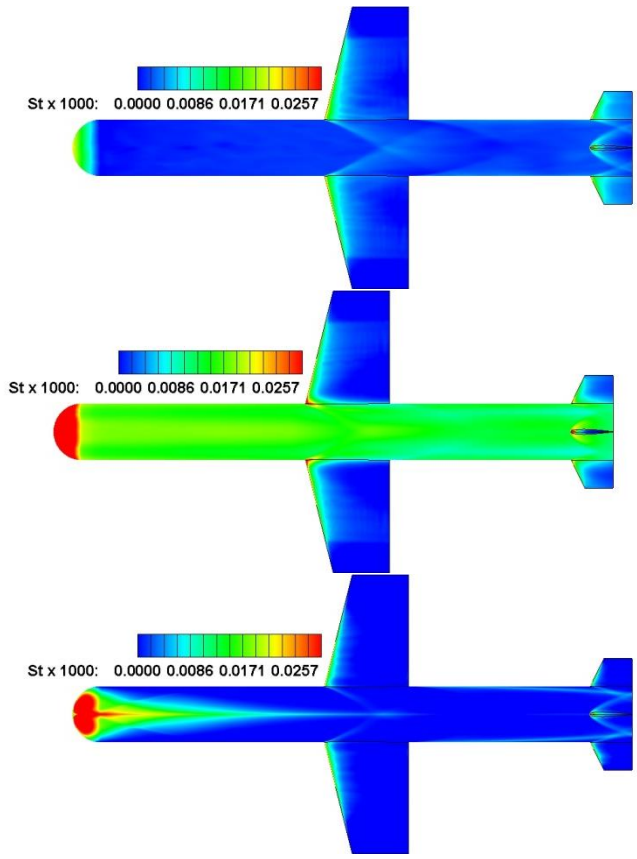


Рисунок 2 – Распределение числа Стэнтона, наветренная сторона модели, невозмущенный поток $\alpha = 0°$ (слева сверху), с источником энергии $\alpha = 0°$ (справа сверху), с источником энергии $\alpha = 5°$ (снизу)

Заключение

Рассмотренные в данной работе варианты мощности, расположения и формы источника энергии помогают сделать определенные выводы относительно выбора наиболее выгодных параметров источника, с точки зрения снижения сопротивления, повышения энергоэффективности или аэродинамического качества.

Библиография

1. *Георгиевский П.Ю., Левин В.А.* Сверхзвуковое обтекание тел при наличии внешних источников тепловыделения // Письма в ЖТФ. 1988. – Т.14, Вып.8. – С. 684–687.

2. *Фомин В.М., Яковлев В.И.* Энергообмен в сверхзвуковых газоплазменных течениях с ударными волнами. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2017. – 368 с.

3. *Скворцов В.В.* Аэродинамические исследования при участии потоков синтезированной плазмы. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2013. – 224 с.

4. *Leonov S., Bityurin V., Yuriev A., Pirogov S., Zhukov B.* Problems in energetic method of drag reduction and flow/flight control // 41st Aerospace Science Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, USA, 6–9 Jan. 2003, AIAA Paper. – 2003-35. – 8 p.

5. *Azarova O., Knight D., Kolesnichenko Y.* Pulsating stochastic flows accompanying microwave filament/supersonic shock layer interaction // Shock Waves. 2011. – Vol. 21. – P. 439–450.

6. *Fomin V., Tretyakov P., Taran J.-P.*. Flow Control Using Various Plasma and Aerodynamic Approaches (Short Review) // Aerospace Science and Technology. 2004. – Vol. 8. – P. 411–421.

7. *Leonov S.B., Li J., Fu S.* Review of Plasma-Based Methods for High-Speed Flow Control // AIP Conference Proceedings. 2011. – Vol. 498, No. 1. – P. 498–502.

Bibliography

1. Georgievskii P.Iu., Levin V.A.. Sverkhzvukovoe obtekanie tel pri nalichii vneshnikh istochnikov teplovydeleniia // Pisma v ZHTF. 1988. – T.14, Vyp.8. – P. 684-687.

2. *Fomin V.M.., Yakovlev V.I.Energoobmen v sverkhzvukovykh gazoplazmennykh techeniyakh s udarnymi volnami*. – M.: FIZMATLIT. 2017. – 368 s.

3. Skvortsov V.V. Aerodinamicheskie issledovaniya pri uchastii potokov sintezirovannoi plazmy. – M.: FIZMATLIT. 2013. – 224 s.

4. *Leonov S., Bityurin V., Yuriev A., Pirogov S., Zhukov B.* Problems in energetic method of drag reduction and flow/flight control // 41st Aerospace Science Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, USA, 6–9 Jan. 2003, AIAA Paper. – 2003-35. – 8 p.

5. *Azarova O., Knight D., Kolesnichenko Y.* Pulsating stochastic flows accompanying microwave filament/supersonic shock layer interaction // Shock Waves. 2011. – Vol. 21. – P. 439–450.

6. *V. Fomin, P. Tretyakov, J.-P. Taran.* Flow Control Using Various Plasma and Aerodynamic Approaches (Short Review) // Aerospace Science and Technology. 2004. – Vol. 8. – P. 411–421.

7. *Leonov S.B., Li J., Fu S.* Review of Plasma-Based Methods for High-Speed Flow Control // AIP Conference Proceedings. 2011. – Vol. 498, No. 1. – P. 498–502.

УДК 517.95; 532.5

DOI 10.53980/9785907599970_237

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕЛИНЕЙНЫМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА МЕТОДОМ ТЕПЛОВОГО БАЛАНСА С ТРЕТЬИМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ*

Ханхасаев В.Н.*, Муняев С.И.**

** Восточный-Сибирский государственный университет технологий и управления, Бурятский государственный университет, Россия, Улан-Удэ, hanhvladnick@mail.ru*

*** Восточный-Сибирский государственный университет технологий и управления, Россия, Улан-Удэ, sergmoon1986@mail.ru*

В работе рассматривается математическая модель для смешанного нелинейного уравнения теплопроводности с краевыми условиями третьего рода. Эта ММ моделирует процесс коммутационного отключения электрической дуги с добавлением периода устойчивого горения её до момента отключения и заменой строго гиперболического уравнения теплопроводности гиперболо-параболическим. При этом, численный расчет задачи ведется по неявной консервативной разностной схеме.

Ключевые слова: *гиперболическое уравнение теплопроводности, нелинейные уравнения смешанного типа, метод конечных разностей, третье краевое условие, тепловой баланс.*

SOLUTION OF THE MIXED HEAT CONDUCTIVITY EQUATION WITH A NONLINEAR HEAT SOURCE BY THE THERMAL BALANCE METHOD WITH THIED BOUNDARY CONDITIONS*

Khankhasaev V.N.*, Munyaev S.I.**

** East Siberia State University of Technology and Management, Buryat State University, Russia, Ulan-Ude, Ulan-Ude*

hanhvladnick@mail.ru

*** East Siberia State University of Technology and Management, Russia, Ulan-Ude, sergmoon1986@mail.ru*

The paper considers a mathematical model for a mixed nonlinear heat equation with boundary conditions of the third kind. This MM models the process of switching off an electric arc with the addition of a period of stable arc burning until the moment of switching off and replacing the strictly hyperbolic heat equation with a hyperbolic-parabolic one. In this case, the numerical calculation of the problem is carried out for an implicit conservative difference scheme.

Key words*: hyperbolic heat equation, nonlinear mixed type equations, finite difference method, third boundary condition, heat balance.*

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ №23-21-00269, https://rscf.ru/project/23-21-00269/

Введение

В кратковременных переходных процессах высоковольтных электрических сетей с очевидной нестационарностью, классические параболические модели теплопроводности, основанные на обычной гипотезе Фурье, создают грубые искажения температурных полей, т.е. классические гипотезы о пропорциональности плотности потока тепла вектору градиента температуры приводят к бесконечной скорости распространения возмущений, что противоречит фундаментальным законам естествознания.

Для разрешения этого парадокса: в рамках теории газодинамики Дж.Максвелл; массообмена Лыков А.В.; теплопроводности К.Каттанео и П.Вернотте – из молекулярно-кинетических представлений, используя гипотезу о конечности времени соударения молекул и представления о их длине свободного пробега, получили новый обобщённый закон тепломассопереноса, в котором

фигурирует дополнительный элемент, так называемое время релаксации, т.е. время установления термодинамического равновесия между потоком и градиентом потенциала. При этом выводится уравнение тепломассопереноса гиперболического типа [1].

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение смешанного типа в частных производных второго порядка:

$$k(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + c(x,t)u + f(u,x,t), \quad (1)$$

в области $G = [0,L] \times [-T_1, T_2]$, здесь при $t \le 0, k(x,t) = 0$, а для $t > 0, k(x,t) > 0$, L – длина стержня, $-T_1, T_2$ – начало и конец отсчета по времени, *p(x,t)* — коэффициент теплопроводности, *k(x,t)* — коэффициент тепловой релаксации, *f(u,x,t)* — внутренний источник тепла.

Начально-краевая задача заключается в определении решения (1) при выполнении следующих краевых условий третьего рода и начального поля температуры:

$$\left[\mp p_{0,L}(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + q_{0,L}u(x,t)\right]_{x=0,L} = g_{0,L}(t), t \in [-T_1, T_2], \quad (2)$$

$$u(x, -T_1) = u_0(x). \quad (3)$$

где $q_{0,L}$ и $g_{0,L}$ — коэффициенты теплоотдачи и плотности теплового потока поверхностных источников на левом и правом концах стержня, $u_0(x)$ – начальный профиль температуры.

Для конкретного задания параметров программы численного решения уравнения (1), примем следующие значения расчетных коэффициентов:

$$k(x,t) = k \text{ при } t > 0,\ a(x,t) = a,\ p(x,t) = x + 2,\ c(x,t) = c,\ f(u,x,t) = u^2,$$

получая уравнение (1) в следующем виде:

$$k\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + a\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x+2)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] + cu(x,t) + u(x,t)^2. \quad (4)$$

2. Численное решение смешанной задачи

Выберем равномерные: пространственную сетку $\{x_i\}_{i=0}^{N}, x_i = i\,h,\ h = L/N$ и сетки по времени: $\{t_j\}_{j=0}^{M_i} = j\tau_i, \tau_1 = T_1/M_1, \tau_2 = T_2/M_2$.

Составим конечно-разностное уравнение для произвольного внутреннего элементарного объема ячейки $[x_{i-0.5}, x_{i+0.5}]$ на промежутке времени $[t_{j-1}, t_j]$. Уравнение теплового баланса принимает следующий вид:

$$k\int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}}\left(\frac{du^{j+1}}{dt} - \frac{du^j}{dt}\right)dx + a\int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}}\left(u^{j+1} - u^j\right)dx =$$
$$= \int_{t_j}^{t_{j+1}}\left[-W_{i+0.5} + W_{i-0.5} + c\int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} u(x,t)\,dx + \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} u^2(x,t)\,dx\right]dt, \quad (5)$$

где $x_{i\pm0.5} = \left(x_i \pm \frac{h}{2}\right)$, $W_{i\pm0.5}$ – тепловые потоки, расчет которых основан на обычном законе Фурье:

$$W_{i+0.5} \approx p_{i+0.5}\frac{U_i - U_{i+1}}{h}, \quad W_{i-0.5} \approx p_{i-0.5}\frac{U_{i-1} - U_i}{h}.$$

Считая изменения по времени поля температуры внутри ячейки $[x_{i-0.5}; x_{i+0.5}]$ незначительными, аппроксимируем левую часть уравнения (5), вводя дискретный аналог U_i^j – сеточную функцию, соответствующую температуре $u(x_i, t_j)$:

$$k\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}}\left(\frac{du^{j+1}}{dt}-\frac{du^{j}}{dt}\right)dx+\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}}\left(u^{j+1}-u^{j}\right)dx=k\left(\frac{du^{j+1}}{dt}-\frac{du^{j}}{dt}\right)\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}}dx+\left(u^{j+1}-u^{j}\right)\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}}dx$$

$$\approx$$

$$\approx hk\left(\frac{U_i^{j+1}-U_i^j}{\tau}-\frac{U_i^j-U_i^{j-1}}{\tau}\right)+h\left(U_i^{j+1}-U_i^j\right).$$

При вычислении интеграла теплового потока с боковой поверхности и внутренних источников будем применять метод трапеций:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)+E(f),\quad E(f)=-\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3. \tag{6}$$

После преобразований и вычислений интегралов по формуле (6), получим следующий вид правой части уравнения (5):

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\left[-W_{i+0.5}+W_{i-0.5}+c\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}}u(x,t)\,dx+\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}}u^2(x,t)\,dx\right]dt\approx\frac{ch\tau}{8}\left[U_i^j+U_{i-1}^j+U_i^{j+1}+U_{i-1}^{j+1}\right]+$$

$$+\frac{ch\tau}{8}\left[U_i^j+U_{i+1}^j+U_i^{j+1}+U_{i+1}^{j+1}\right]+\frac{h\tau}{4}\left[\left(U_i^j\right)^2+U_i^jU_{i-1}^j+\left(U_{i-1}^j\right)^2\right]+\frac{h\tau}{4}\left[\left(U_i^j\right)^2+U_i^jU_{i+1}^j+\left(U_{i+1}^j\right)^2\right].$$

Окончательно преобразуя (5), получаем неявную конечно-разностную схему:

$$hk\left(\frac{U_i^{j+1}-U_i^j}{\tau}-\frac{U_i^j-U_i^{j-1}}{\tau}\right)+h\left(U_i^{j+1}-U_i^j\right)=\frac{ch\tau}{8}\left[U_i^j+U_{i-1}^j+U_i^{j+1}+U_{i-1}^{j+1}\right]+$$
$$+\frac{ch\tau}{8}\left[U_i^j+U_{i+1}^j+U_i^{j+1}+U_{i+1}^{j+1}\right]+\frac{h\tau}{4}\left[\left(U_i^j\right)^2+U_i^jU_{i-1}^j+\left(U_{i-1}^j\right)^2\right]$$
$$+\frac{h\tau}{4}\left[\left(U_i^j\right)^2+U_i^jU_{i+1}^j+\left(U_{i+1}^j\right)^2\right]. \tag{7}$$

С помощью метода теплового баланса несложно составить разностные уравнения и для граничных элементарных объемов. При этом в уравнениях теплового баланса следует учитывать тепловые потоки на границе области в окружающую среду, выражения для которых вытекают из граничных условий (2). Таким образом получим аппроксимацию краевых условий в следующем виде:

$$p_{0.5}\frac{U_0^{j+1}-U_1^{j+1}}{h}+q_0U_0^{j+1}$$
$$=g_0+\frac{h}{2}\left[\left(U_0^j\right)^2-cU_0^j-k\left(\frac{U_0^{j+1}-U_0^j}{\tau}-\frac{U_0^j-U_0^{j-1}}{\tau}\right)-\left(U_0^{j+1}-U_0^j\right)\right]. \tag{8}$$

$$p_{N-0.5}\frac{U_N^{j+1}-U_{N-1}^{j+1}}{h}+q_LU_N^{j+1}$$
$$=g_L+\frac{h}{2}\left[\left(U_N^j\right)^2-cU_N^j-k\left(\frac{U_N^{j+1}-U_N^j}{\tau}-\frac{U_N^j-U_N^{j-1}}{\tau}\right)-\left(U_N^{j+1}-U_N^j\right)\right]. \tag{9}$$

3. Формирование начальных условий для гиперболического этапа.

На первом этапе уравнение (4) имеет вид параболического уравнения, т.е. при отрицательных t коэффициент $k(x,t)=0$ и соответствующее начальное условие (3). Однако при $0 \le t \le T_2$ уравнение (4) приобретает вид гиперболического, для которого необходимо определить первое начальное условие из предыдущего расчета для $t=0$:

$$u(x,0) \quad => \quad u_i^0 = U_i^{M_1}, \quad 0 \le i \le N.$$

Второе начальное условие зададим с повышением порядка аппроксимации по времени до второго; для этого запишем ряд Тейлора на точном решении по времени в окрестности $t=0$:

$$u_i^{M_1-1} = u(x_i, M_1 - \tau_1) = U_i^{M_1} - \tau_1 \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_i^{M_1} + \frac{{\tau_1}^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_i^{M_1} + O({\tau_1}^3), \qquad (10)$$

где, вторую производную выведем из уравнения (4):

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial x}\left[(x+2)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] - \frac{a}{k}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{c}{k}u(x,t) + \frac{1}{k}u^2(x,t) =$$

$$= \frac{1}{k}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{(x+2)}{k}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{a}{k}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{c}{k}u(x,t) + \frac{1}{k}u^2(x,t). \qquad (11)$$

Отсюда, решая (10) относительно первой производной и используя (11), получаем второе начальное условие для гиперболического уравнения в следующем виде:

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \left(1 + \frac{\tau_1}{2}\frac{a}{k}\right)\frac{U_i^{M_1} - U_i^{M_1-1}}{\tau_1} -$$

$$-\frac{\tau_1}{2}\left[\frac{1}{k}\frac{U_{i+1}^{M_1} - U_i^{M_1}}{h} + \frac{(ih+2)}{k}\frac{U_{i+1}^{M_1} - 2U_i^{M_1} + U_{i-1}^{M_1}}{h^2} - \frac{a}{k}\frac{U_i^{M_1} - U_i^{M_1-1}}{\tau_1} + \frac{c}{k}U_i^{M_1} + \frac{1}{k}\left(U_i^{M_1}\right)^2\right].$$

Заключение

После установления всех необходимых компонентов уравнение (1) с начально-краевыми условиями (2-3) решается также методом прогонки в среде программного пакета Mathcad-15. Полученные температурные поля хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными.

Библиография

1. *Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю.* Волновые явления теплопроводности. Системно-структурный подход. Изд. 2–е. – М.: УРРС, 2004. – 296 с.

2. *Гайдук А.Р.* Оптимальные и адаптивные системы автоматического управления. – М.: Учлитвуз, 2006. – 246 с.

3. *Дульнев Г.Н., Парфёнов В.Г., Сигалов А.В.* Применение ЭВМ для решения задач теплообмена // М.: Высшая школа, 1990. – 207 с.

4. *Соболев С.Л.* Локально-неравновесные модели процессов переноса // УФН. 1997. Т. 167. № 10. С. 1096 – 1106.

Bibliography

1. *Shashkov A.G., Bubnov V.A., Yanovsky S.Yu.* Wave phenomena of heat conduction. System-structural approach. Ed. 2nd.– M.: URRS, 2004. – 296 p.

2. *Gaiduk A.R. Optimal and adaptive automatic control systems.* – M.: Uchlitvuz, 2006. – 246 p.

3. *Dulnev G.N., Parfenov V.G., Sigalov A.V.* The use of computers for solving heat transfer problems. – M .: Higher school, 1990. – 207 p.

4. *Gaiduk A.R. Optimal and adaptive automatic control systems.* – M.: Uchlitvuz, 2006. – 246 p.

УДК 517.95; 532.5

DOI 10.53980/9785907599970_241

ДВУХМЕРНЫЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ СЛУЧАЙ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМЕШАННОГО ОПЕРАТОРА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Ханхасаев В.Н.*, Пластинина В.М.**
**Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,*
Бурятский государственный университет,
Россия, Улан-Удэ, hanhvladnick@mail.ru
*** Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,*
Россия, Улан-Удэ, plastininav@yandex.ru

В работе представлена математическая модель и конечно-разностная схема процесса отключения электрической дуги в спутном потоке газа. Приводятся недостатки использования классического параболического уравнения теплопроводности для данного случая. Поставлена и численно решена начально-краевая задача с краевыми условиями первого рода для однородной мембраны.

Ключевые слова: *гиперболическое уравнение теплопроводности, гиперболо-параболические уравнения, метод конечных разностей, первые краевые условия.*

THE FIRST BOUNDARY PROBLEM FOR THE MIXED HEAT OPERATOR IN THE SECOND-SIZE SPACE CASE

V.N. Khanhasayev*, V.M. Plastinina**
**East Siberian State University of Technology and Management,*
Buryat State University,
Ulan-Ude, Russia, hanhvladnick@mail.ru
***East Siberian State University of Technology and Management,*
Ulan-Ude, Russia, plastininav@yandex.ru

The paper presents a mathematical model and a finite-difference scheme for the process of switching off an electric arc in a cocurrent gas flow. The disadvantages of using the classical parabolic heat equation for this case are given. An initial-boundary value problem with boundary conditions of the first kind for a homogeneous membrane is posed and numerically solved.

Key words: *hyperbolic heat equation, hyperbolic-parabolic equations, finite difference method, first boundary conditions.*

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ №23-21-00269, https://rscf.ru/project/23-21-00269/

Введение

В работах Ханхасаева В.Н. [1], посвященных математическому моделированию процесса отключения электрической дуги в спутном потоке газа, аналитически и численно решались различные математические модели для гиперболического уравнения теплопроводности, получаемого обобщением гипотезы Фурье.

Дифференциальное уравнение переноса, получаемое из классического закона Фурье, в двухмерном пространственном случае имеет вид параболического уравнения :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \quad (1)$$

Хорошо известно, что обычное уравнение теплопроводности имеет недостаток в том, что тепло может мгновенно распространяться в пространстве. Причина этого дефекта причинно-следственной связи заключается в том, что уравнение теплопроводности первого порядка по времени. Второй

недостаток, связанный с этим, - это ограничение задачи с начальными значениями. В задаче Коши может быть указана только температура T в момент времени t = 0. Но в экспериментах также производная по времени ∂T/∂t при t = 0 может быть адаптирована к экспериментальной ситуации. Это возможно в гиперболическом уравнении теплопроводности второго порядка по времени.

Уравнение (1) представляет собой уравнение в частных производных параболического типа, и его аналитические решения показывают парадоксальное поведение бесконечной скорости распространения теплового возмущения. Любое локальное изменение температуры вызывает мгновенное возмущение в каждой точке среды на любом расстоянии от начала координат. Это противоречит теории относительности, а также известным механизмам теплопроводности [2].

Эксперименты со вторым звуком в твердом гелии и других кристаллических твердых телах, при очень низких температурах и очень короткой продолжительности ясно показали, что тепло течет как затухающая волна. Если кристаллическая структура практически бездефектна (идеальна) и выполняются условия для второго звука, то после импульсного нагрева наблюдаемое горбовидное образование повышенной температуры (затухающая тепловая волна) перемещается с постоянной скоростью через среду. Волна отскакивает назад и вперед от границ, медленно рассеивая свою энергию по пути. Затухающая тепловая волна описывается уравнением в частных производных гиперболического типа, впервые полученным Максвеллом, а затем постулированным Верноттом и Каттанео [3].

Применяя обобщенный закон Фурье, получаем гиперболическое уравнение теплопроводности в двумерном случае:

$$\tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (2)$$

Раздел 1. Постановка начально-краевой задачи

Модифицируем математическую модель исследуемых процессов, рассматривая вместо гиперболического уравнения теплопроводности уравнение теплопроводности гиперболо-параболического типа:

$$z(x,y,t)u_{tt} + a(x,y,t)u_t = \lambda(u_{xx} + u_{yy}) + c(x,y,t)u + f(x,y,t). \quad (3)$$

В области $G = [0,X] \times [0,Y] \times [-T,T], \quad -T < 0,\ T > 0$. При этом, z*(x,y,t)=0, t≤0*; z*(x,y,t)>0, t>0; a(x,y,t)>0, (x,y,t)*∈*G*, т.е. при *t≤0* – уравнение (3) - параболическое, а при *t>0* -гиперболическое.

Начально-краевая задача: Найти температурное поле в однородной мембране с $X=Y=\pi$ и интервалом времени [-1,1] со следующими значениями коэффициентов: *z=1 при t>0, c=0, λ=1, a=1*, и источником тепла: *f(x,y,t)=0* для конкретного расчета в программе Mathcad-15.

Тогда уравнение (3) примет вид:

$$u_{tt} + u_t = u_{xx} + u_{yy} \quad (4)$$

Начальные условия*:*

$$u(x,y,t)|_t = u_0(x,y), \qquad u_0(x,y) = \sin(x) * \sin(y) \quad (5)$$

Однородные краевые условия*:*

$$u(0,y,t) = 0,\ u(\pi,y,t) = 0, \qquad u(x,0,t) = 0,\ u(x,\pi,t) = 0,$$

$$0 \le x,y \le \pi, \quad -1 < t \le 1 \quad (6)$$

Раздел 2. Численное решение поставленной задачи

Применяя метод конечно-разностной аппроксимации [4] точной постановки начально-краевой задачи для уравнения (3) её дискретной постановкой, рассмотрим явную разностную схему:

$$z(x,y,t)\frac{\left(u_{i,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k} + u_{i,j}^{k-1}\right)}{\tau^2} + a(x,y,t)\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k}}{\tau} =$$

$$= \lambda \frac{u_{i+1,j}^k - 4u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j-1}^k + u_{i,j+1}^k}{h^2} + c(x,y,t) \cdot u_{i,j}^k + f(x,y,t) \quad (7)$$

В случае начально-краевой задачи (4-6) получим:

$$\frac{\left(u_{i,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^k + u_{i,j}^{k-1}\right)}{\tau^2} + \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\tau} = \frac{u_{i+1,j}^k - 4u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j-1}^k + u_{i,j+1}^k}{h^2}$$

Формула для параболического уравнения:

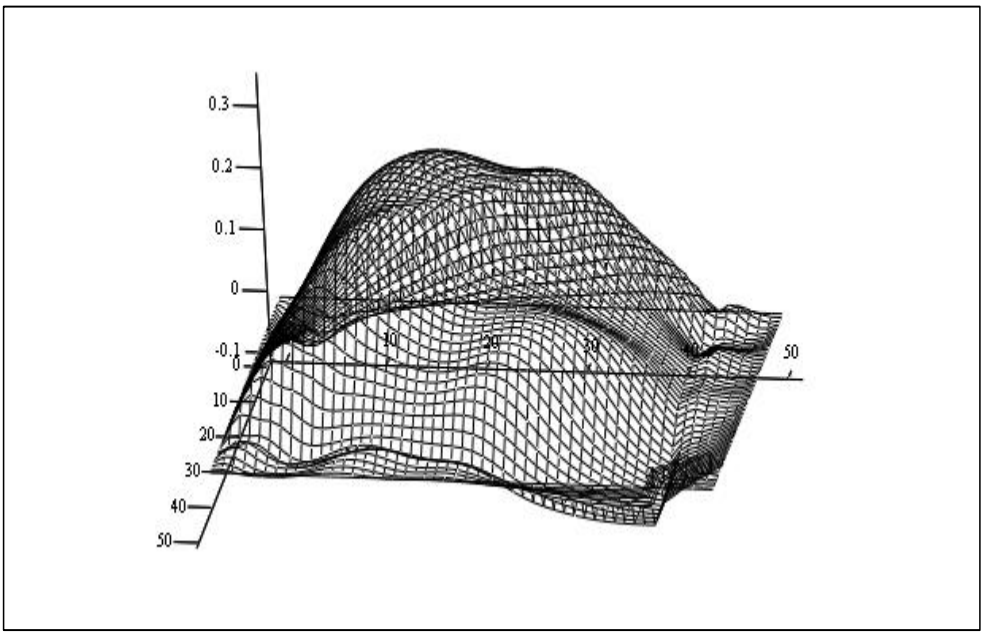
$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \frac{\tau}{h^2}(u_{i+1,j}^k - 4u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j-1}^k + u_{i,j+1}^k)$$

Формула для гиперболического уравнения:

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{1+\tau}\frac{\tau^3}{h^2}\left((2\tau+1)u_{i,j}^k - \tau u_{i,j}^{k-1} + u_{i+1,j}^k - 4u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j-1}^k + u_{i,j+1}^k\right)$$

Кроме этого, проведем дискретизацию первых краевых условий:

$$u_{0,j}^k = 0, \quad u_{n,j}^k = 0, \; u_{i,0}^k = 0, \; u_{i,n}^k = 0. \quad (11)$$



U

Рисунок 1

Программа написана в системе MathCAD-15. Результаты представлены на рисунке 1.

Заключение

Данная модель достаточно адекватно описывает некоторые процессы, связанные с отключением электрической дуги в спутном потоке газа. В дальнейшем планируется использовать метод теплового баланса, применить эту математическую модель к более реальной задаче и в трехмерном пространственном случае.

Библиография

1. *Ханхасаев В.Н., Дармахеев Э.В.* О некоторых применениях гиперболического уравнения теплопроводности и методах его решения. Математический анализ. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 155, ВИНИТИ РАН. – М., 2018. – С. 89–97 с.

2. Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности: Системно-структурный подход. 2-е изд. доп. – М.: УРРС. 2004. – 296 с.

3. Gunter Scharf, “Approach to steady state in the heat equation and the hyperbolic heat transfer equation” arXiv:1612.08527 [math-ph]

4. *Дульнев Г.Н., Парфенов В.Г., Сигалов А.В.* Применение ЭВМ для решения задач теплообмена Учебное пособие для теплофизических и теплоэнергетических спец. вузов. – М.: Высшая школа, 1990. – 207 с.

Bibliography

1. *Khankhasaev V. N. et al.* O “On some applications of the hyperbolic heat equation and methods of its solution", Mathematical analysis, Results of Science and Technology. //Mathematical notes of NEFU. – 2018. – T. 25. – №. 1. – C. 98-111.

2. Shashkov A.G., Bubnov V.A., Yanovsky S.Yu. Wave phenomena of heat conduction. System-structural approach. Ed. 2nd.– M.: URRS, 2004. – 296 p.

3. Gunter Scharf, “Approach to steady state in the heat equation and the hyperbolic heat transfer equation” arXiv: 1612.08527 [math-ph]

4. *Dulnev G.N., Parfenov V.G., Sigalov A.V.* The use of computers for solving heat transfer problems Textbook for thermophysical and thermal power engineering special universities M.: Higher School, 1990. - 207 p.

УДК

DOI 10.53980/9785907599970_245

О ВЛИЯНИИ ОСОБЫХ ТОЧЕК НА ЧИСЛЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ РЕШЕНИИ НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ*

Чистяков В.Ф., Чистякова Е.В.
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
Россия, Иркутск
chist@icc.ru, elena.chistyakova@icc.ru

Рассматриваются линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка с тождественно вырожденной в области определения матрицей при старшей производной искомой вектор-функции. Особое внимание уделено системам при наличии на отрезке интегрирования особых точек. В статье формализовано понятие особой точки. Дана их классификация. Обсуждаются вопросы численного решения.

Ключевые слова: *дифференциально-алгебраические, уравнения, пространство решений, размерность, индекс, особые точки.*

HOW SINGULAR POINTS AFFECT NUMERICAL PROCESSES WHEN SOLVING INITIAL VALUE PROBELSM IN DIFFERENTIAL ALGEBRAIC EQUATIONS

Chistyakov V.F., Chistyakova E.V.
**Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences*
Russia, Irkutsk
chist@icc.ru, elena.chistyakova@icc.ru

We consider linear systems of ordinary differential equations of arbitrary order with an identically degenerate matrix multiplying the highest derivative of the desired vector function. Particular attention is paid to systems with singular points in the domain. We formalize the notion of a singular point and present their classification. Methods of numerical solutions for such problems are discussed.

Key words*: differential algebraic equation, solution space, dimension, index, singular points.*

Введение

Под дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ) в настоящее время принято понимать системы, включающие в себя взаимосвязанные обыкновенные дифференциальные уравнения различных порядков и алгебраические соотношения. На практике ДАУ встречаются достаточно часто и возникают при математическом моделировании широкого круга прикладных задач, таких, как механика многотельных и гибких тел, проектирование электрических и гидравлических цепей, оптимальное управление, движение несжимаемой жидкости, молекулярная динамика, химическая кинетика и др. О прикладных аспектах ДАУ можно прочитать, например, в [1]. Концепция ДАУ является обобщением понятия обыкновенных дифференциальных уравнений, однако при этом ДАУ обладают фундаментальными математическими свойствами, отличными от свойств ОДУ и их численное решение имеет ряд трудностей, в частности, если интервал интегрирования содержит особые точки.

1. Постановка задачи

Рассмотрим системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) вида

$$\Lambda_k x := \sum_{i=0}^{k} A_i(t) x^{(i)} = f(t), t \in T \qquad (1)$$

* Результаты получены в рамках госзадания Минобрнауки России по проекту «Теория и методы исследования эволюционных уравнений и управляемых систем с их приложениями» (№ гос. регистрации 121041300060-4)

где $A_i(t)$ – $(n \times n)$-матрицы, $x(t)$ – искомая и $f(t)$ – известная вектор-функции, $x^{(i)}(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^i x(t)$, $x^{(0)}(t) = x(t)$. При этом выполнено соотношение $\det A_k(t) = 0 \; \forall t \in T$. Такие системы принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями. Под решениями ДАУ (1) мы понимаем любую $k-$раз дифференцируемую на T вектор-функцию $x(t)$, которая обращает ДАУ (1) в тождество на T при подстановке. Под особыми точками мы неформально понимаем любую точку на отрезке T, при наличии которой ДАУ (1) или не имеет решений на T, или на T меняется размерность многообразия решений и т.д. Будем считать что для ДАУ (1) заданы начальные данные в виде соотношения

$$P\mathrm{x}(\alpha) = \mathrm{a}, \tag{2}$$

где P – заданная $(m \times \mathrm{m})$-матрица полного ранга, $\mathrm{x} = \left(x^\top \dot{x}^\top \ldots \left(x^{(k-1)}\right)^\top\right)^\top$, $\top$ – символ транспонирования, $\mathrm{m} = kn$, $m \leq \mathrm{m}$, a – заданный вектор. Задача (1), (2) при $P = E_\mathrm{m}$, где $E_\mathrm{m}-$ единичная матрица размерности m, совпадает с задачей Коши. Матрица P выбирается из условия совместности задачи (1), (2) [2].

2. Важные теоремы

Определение 1. Если существует $(n \times d)$-матрица $\tilde{X}_d(t) \in \mathbf{C}^k(T)$ такая, что любой элемент линейного пространства решений (ПР) однородной системы (1) на отрезке T представим в виде произведения $\tilde{X}_d(t)c$, где $c-$вектор произвольных постоянных, то будем говорить, что это ПР конечномерно ($\dim \ker \Lambda k < \infty$). Минимально возможное значение целочисленного параметра d назовем размерностью ПР ДАУ (1). ПР однородной системы (1) бесконечномерно ($\dim \ker \Lambda k = \infty$), если оно содержит бесконечное количество линейно-независимых решений.

Поставим в соответствие системе (1) эквивалентное ДАУ первого порядка

$$\mathrm{A}(t)\dot{\mathrm{x}} + \mathrm{B}(t)\mathrm{x} = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & A_k(t) \end{pmatrix}\dot{\mathrm{x}} + \begin{pmatrix} 0 & -E_m \\ A_0(t) & \tilde{A}(t) \end{pmatrix}\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, t \in T, \tag{3}$$

где

$$m = (k-1)n, \tilde{A}(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) & \ldots & A_{k-1}(t) \end{pmatrix}, \dot{\mathrm{x}} = \frac{dx}{dt}.$$

Теорема 1. Пусть в ДАУ (1):

1. Все элементы матриц $A_i(t), i = \overline{0,k}$ являются вещественно-аналитическими функциями на T(ниже используется запись $A_i(t) \in \mathbf{C}^A(T)$);

2. Пространство решений конечномерно ($\dim \ker \Lambda_k < \infty$).

Тогда для ДАУ (3) существуют (m×m)-матрицы $P(t)$, $Q(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, $\mathrm{m} = kn$, такие, что $\det P(t)Q(t) \neq 0 \; \forall t \in T$, $P(t)\mathrm{A}(t)Q(t)\dot{y} + [P(t)\mathrm{B}(t)Q(t) + P(t)\mathrm{A}(t)\dot{Q}(t)]y =$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}(t) & \tilde{A}_{12}(t) \\ 0 & \tilde{A}_{22}(t) \end{pmatrix}\dot{y} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11}(t) & \tilde{B}_{12}(t) \\ 0 & \tilde{B}_{22}(t) \end{pmatrix} y \;\; \forall y(t) \in \mathbf{C}^1(T) \tag{4}$$

где $\mathrm{x}(t) = Q(t)y(t)$, $\tilde{A}_{22}(t), \tilde{B}_{22}(t) -$ верхнетреугольные ($[\mathrm{m}-d] \times [\mathrm{m}-d]$)-блоки с идентичной блочной структурой, диагональ $N(t)$ содержит l квадратных нулевых блоков, $\det \tilde{A}_{22}(t)_{22} \neq 0, \det \tilde{B}_{22}(t) \neq 0$ на T.

Определение 2. Точки $t_j \in T, j = \overline{1,q}$ со свойствами $\det \tilde{A}_{22}(t_j)_{22} \neq 0, \det \tilde{B}_{22}(t_j) \neq 0$, мы назовем дифференциальными и алгебраическими особыми точками системы (1), соответственно.

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда существует оператор

$$\Omega_l = \sum_{j=0}^{l} L_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j, \; t \in T,$$

где $L_j(t) - (n \times n)$-матрицы из $\mathbf{C}^A(T)$, со свойствами

$$\Omega_l \circ \Lambda_k v = \widetilde{\Lambda} v \; \forall v \equiv v(t) \in \mathbf{C}^{l+k}(T),$$

где $\widetilde{\Lambda}_k v = \sum_{i=0}^{k} \tilde{A}(t)v^i(t)$, $\tilde{A}_i(t) - (n \times n)$-матрицы из $\mathbf{C}^A(T)$, $\det \tilde{A}_k(t) \not\equiv 0 \; \forall t \in T$ и особые точки ДАУ (1) совпадают с точками $t_j \in T, j = \overline{1,q}$, в которых $\det \tilde{A}_k(t_j) = 0$.

Некоторые критерии присутствия особых точек на T содержатся в статье [2]. Пространство решений ДАУ с особыми точками может зависеть от произвольных констант, количество которых превышает размерность системы.

В докладе показано, что применение разностных методов для решения ДАУ вида (1) дает неверные сведения о расположении особых точек на T. Поэтому в качестве базового метода решения

начальных задач (1), (2) авторами предлагается использовать вариант метода наименьших квадратов, когда исходная задача сводится к поиску минимума функционала

$$\Phi(x) = \|\Lambda_k x - f\|^2_{\mathrm{L}_2(T)} + \|P\mathrm{x}(\alpha) - \mathrm{a}\|^2_{E_m},\ l \le k;$$

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{l-k} \left\| \left(\frac{d}{dt}\right)^i (\Lambda_k x - f)\right\|^2_{\mathrm{L}_2(T)} + \|P\mathrm{x}(\alpha) - \mathrm{a}\|^2_{E_m},\ l \le k$$

где $\|.\|_{E_m}$ −евклидова норма, l−параметр из теоремы 1, называемый в случае отсутствия на T особых точек индексом ДАУ (1). В докладе приведены данные численных экспериментов. Применение метода наименьших квадратов для решения ДАУ вида (1) при k = 1 рассматривалось, например, в работе [3].

Заключение

Таким образом, особые точки линейных дифференциально-алгебраических уравнений высокого порядка могут быть обнаружены в области определения с помощью редукции исходного уравнения к системе первого порядка и применения матричных преобразований. Метод наименьших квадратов справляется с численным решением таких задач даже при наличии особых точек на отрезке интегрирования.

Библиография

1. *Campbell S., IIchmann A., Mehrmann V., Reis T.* Applications of Differential-Algebraic Equations: Examples and Benchmarks. Springer. 2019. – 320 p.
2. *Chistyakov V.F., Chistyakova E.V.* Evaluation of the Index and Singular Points of Linear Differential-Algebraic Equations of Higher Order // Journal of Mathematical Sciences. 2013. —Vol. 231, Issue 6 – P. 827–845.
3. *Чистяков В.Ф., Чистякова Е.В.* Применение метода наименьших квадратов для решения линейных дифференциально-алгебраических уравнений // Сиб. журн. вычисл.матем. 2013. – Т. 16, №1. – С. 81–95.

Bibliography

1. *Campbell S., IIchmann A., Mehrmann V., Reis T.* Applications of Differential-Algebraic Equations: Examples and Benchmarks. Springer. 2019. 320 p.
2. Chistyakov V.F., Chistyakova E.V. Evaluation of the Index and Singular Points of Linear Differential-Algebraic Equations of Higher Order // Journal of Mathematical Sciences. 2013. —Vol. 231, Issue 6 – P. 827–845.
3. Chistyakov V.F., Chistyakova E.V. Application of the least squares method to linear differential-algebraic equations. Siberian Journal of Comput. Math. 2013. – Vol. 16, No. 1. – P. 81–95.

УДК 517.977

DOI 10.53980/9785907599970_248

НАХОЖДЕНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ МНОГОЗВЕННЫХ МАНИПУЛЯЦИОННЫХ РОБОТОВ*

Чупин И.А.*, Долгий Ю.Ф.**
**Уральский федеральный университет, Россия, Екатеринбург*
mr.tchupin@yandex.ru
*** Уральский федеральный университет, Россия, Екатеринбург*
jury.dolgy@urfu.ru

Механическая модель манипуляционного робота состоит из конечного набора абсолютно твердых тел, соединения которых описываются идеальными стационарными геометрическими связями. Импульсные управления в начальный момент времени сообщают необходимую энергию роботу для выхода на траекторию, соединяющую его начальное и конечное положения, а в конечный момент гасят скорость. Для нахождения траектории и времени движения по траектории используется теорема Якоби для канонической системы дифференциальных уравнений. Вычисляется энергия, необходимая для реализации движения робота.

Ключевые слова: *импульсное управление, манипулятор, теорема Якоби, быстродействие, энергозатратность.*

FINDING IMPULSE CONTROL FOR MULTI-LINK MANIPULATION ROBOTS

Chupin I.A.*, Dolgii Yu.F.**
** Ural Federal University, Russia, Yekaterinburg, mr.tchupin@yandex.ru*
*** Ural Federal University, Russia, Yekaterinburg, jury.dolgy@urfu.ru*

The mechanical model of the manipulation robot consists of a finite set of rigid bodies. The connections of which are described by ideal stationary geometric constraints. Impulse controls at the initial time provide the necessary energy to the robot to enter the trajectory connecting its initial and final positions, and at the final moment they dampen the speed. To find the trajectory and the time of movement along the trajectory the Jacobi theorem for the canonical system of differential equations is used. The energy required to implement the movement of the robot is calculated.

Key words*: Impulse control, manipulator, Jacobi theorem, time performance, energy consumption.*

Введение

Механическая модель манипуляционного робота состоит из конечного набора абсолютно твердых тел, соединения которых описываются идеальными стационарными геометрическими связями. Силовые взаимодействия в системе определяются потенциальными и управляющими силами.

Считаем, что система имеет n степеней свободы и положения манипулятора описываются обобщенными координатами $q_1,\ldots,q_n$. В координатном пространстве R^n вектора положений $q=(q_1,\ldots,q_n)^T$ принадлежат рабочей зоне D, которая является открытым связанным множеством $D\subseteq R^n$.

Кинетическая энергия манипулятора определяется формулой

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j=\frac{1}{2}\big(A(q)\dot{q},\dot{q}\big),$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (Проект № 22-21-00714).

в которой элементы матричной функции $A(q)=\left(a_{ij}(q)\right)_{i,j=1}^{n}$ являются непрерывными функциями в области D, в каждой точке которой матрица $A(q)$ является симметричной и положительно определенной. Потенциальное взаимодействие описывается потенциальной энергией $\Pi(q)=\Pi(q_1,\ldots,q_n)$, а управляющие взаимодействия обобщенными силами u_i, $1\le i\le n$.

Для описания движения используется система канонических дифференциальных уравнений. Функция Гамильтона имеет вид

$$H(q,p)=\frac{1}{2}\left(A^{-1}(q)\,p,\,p\right)+\Pi(q),$$

где $p=A(q)\dot{q}$ - вектор обобщенных импульсов $p_1,\ldots,p_n$. Канонические уравнения движения

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i}+u_i,\quad i=\overline{1,n}.$$

Постановка задачи

Рассматриваемое множества импульсных управлений имеет вид

$$u_i(t)=S_i^0\delta(t)+S_i^T\delta(t-T),\ i=\overline{1,n},\quad t\in[0,T],$$

где $\delta(\cdot)$ – функция Дирака, а T – время движения манипулятора из начального положения равновесия $q(0)=q^0$, $p(0)=0$ в заданное конечное положение равновесия $q(T)=q^T$, $p(T)=0$.

Импульсные управления в начальный момент времени служат для перевода манипулятора из начального положения равновесия на специальную траекторию движения в фазовом пространстве R^{2n}, проекция которой на координатное пространство R^n соединяет точки q^0 и q^T. Импульсные управления в конечном положении служат для гашения скорости.

Для решения задачи необходимо определить траекторию движения в координатном пространстве, время T движения по траектории и силовые импульсы S_i^0, S_i^T, $i=\overline{1,n}$.

Основные результаты

При решении задачи используются первые интегралы канонических уравнений, которые определяются теоремой Якоби

$$\frac{\partial W(q,a,h)}{\partial a_i}=b_i,\quad i=\overline{1,k-1},\quad a=(a_1,\ldots,a_{n-1})^T, \tag{1}$$

$$\frac{\partial W(q,a,h)}{\partial q_i}=p_i,\quad i=\overline{1,k}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial W(q,a,h)}{\partial h}=t+t_0. \tag{3}$$

Здесь $a_i, b_i, i=\overline{1,n-1}, h, t_0$ – произвольные постоянные, $W(q,a,h)$ – полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби

$$H\left(q,\frac{\partial W}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial W}{\partial q_n}\right)=h.$$

Будем полагать, что полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби известен.

Искомая траектория движения определяется формулами (1), и для нее должны выполняться условия

$$\frac{\partial W(q^0,a,h)}{\partial a_i}=\frac{\partial W(q^T,a,h)}{\partial a_i}=b_i,\quad i=\overline{1,n-1}.$$

Данные условия определяют неизвестные параметры $a_i, b_i, i=\overline{1,n}$. Для произвольного параметра h параметры a_i определяются неявно системой уравнений

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\Big(W\left(q^0,a,h\right)-W\left(q^T,a,h\right)\Big)=0,\quad i=\overline{1,n-1}.$$

Будем полагать, что эта система имеет единственное решение $a_i=a_i\left(h\right), i=\overline{1,n-1}$. Тогда искомая траектория определяется неявно системой уравнений

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\Big(W\left(q,a,h\right)-W\left(q^0,a,h\right)\Big)_{a=a(h)}=0,\quad i=\overline{1,n-1}. \tag{4}$$

Уравнения, определяющие траекторию, содержат произвольный параметр h.

Время перехода из точки q^0 в q^T по траектории (4) находится с учетом уравнения (3). Имеем

$$T=T\left(h\right)=\frac{\partial}{\partial h}\Big(W\left(q^T,a,h\right)-W\left(q^0,a,h\right)\Big)_{a=a(h)}.$$

Время движения по траектории также зависит от произвольного параметра h.

Из канонических дифференциальных уравнений для обобщенных импульсов, с учетом краевых условий, вида импульсных управлений и свойства функции Дирака, находим

$$p_i\left(+0\right)=S_i^0,\quad p_i\left(T-0\right)=-S_i^T,\quad i=\overline{1,n}.$$

Используя первые интегралы (2), имеем формулы, определяющие силовые импульсы

$$S_i^0=\frac{\partial W\left(q^0,a\left(h\right),h\right)}{\partial q_i},\quad S_i^T=\frac{\partial W\left(q^T,a\left(h\right),h\right)}{\partial q_i},\quad i=\overline{1,n}.$$

При движении по траектории управляющие воздействия не действуют, и энергия не расходуется. При выходе на траекторию работа импульсных сил определяется формулой

$$A_0=\frac{1}{2}p^T\left(+0\right)A^{-1}\left(q^0\right)p\left(+0\right),$$

а при сходе с траектории – определяется формулой

$$A_T=-\frac{1}{2}p^T\left(T-0\right)A^{-1}\left(q^T\right)p\left(T-0\right).$$

Используя первые интегралы (2), находим энергию, необходимую для перехода манипулятора из начального положения равновесия в конечное

$$E=E\left(h\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial W\left(q^0,a\left(h\right),h\right)}{\partial q}A^{-1}\left(q^0\right)\left(\frac{\partial W\left(q^0,a\left(h\right),h\right)}{\partial q}\right)^T+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial W\left(q^T,a\left(h\right),h\right)}{\partial q}A^{-1}\left(q^T\right)\left(\frac{\partial W\left(q^T,a\left(h\right),h\right)}{\partial q}\right)^T.$$

Заключение

Предложенный метод позволяет построить импульсные управления для многозвенного манипуляционного робота с идеальными стационарными связями. Данная методика была применена при построении импульсных управления для безынерционного [1] и инерционного [2] двухзвенника.

Библиография

1. *Долгий Ю.Ф., Чупин И.А.* Импульсные управления двухзвенным манипуляционным роботом // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2021. – № 57. – С. 77–90.

2. *Dolgii Y., Chupin I.* Impulse control of the inertial manipulation robot // Proceedings of 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitsky's Conference). STAB 2022. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.

Bibliography

1. *Dolgii Yu.F., Chupin I.A.* Impulse control of a two-link manipulation robot // Izvestia Instituta Matematiki I Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta. 2021. − № 57. – P. 77–90.

2. *Dolgii Y., Chupin I.* Impulse control of the inertial manipulation robot // Proceedings of 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitsky's Conference). STAB 2022. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.

УДК 519.71

DOI 10.53980/9785907599970_252

О ПОЗИТИВНОЙ ПОЛНОТЕ МНОЖЕСТВА МУЛЬТИФУНКЦИЙ РАНГА 2*

Шаранхаев И.К.
Бурятский государственный университет, Россия, Улан-Удэ
goran5@mail.ru

В статье рассматривается задача выразимости мультифункций с помощью оператора позитивного замыкания. Найдено необходимое и достаточное условие позитивной полноты произвольного множества мультифункций ранга 2.

Ключевые слова: *мультифункция, суперпозиция, полнота, к-значная логика.*

ON POSITIVE COMPLETENESS OF SET RANK 2 MULTIFUNCTIONS

Sharankhaev I.K.
Buryat State University, Russia, Ulan-Ude, goran5@mail.ru

The problem of expressibility of multifunctions by the positive closure operator is considered. A necessary and sufficient condition for the positive completeness of an arbitrary set of multifunctions of rank 2 is found in article.

Key words*: multifunction, superposition, completeness, k-valued logic.*

Введение

В теории функций к-значной логики традиционной проблемой является исследование структуры или решетки так называемых замкнутых классов. Число замкнутых классов функций алгебры логики является счетным, а для функций к-значной логики при к>2 и вовсе континуальным. Счетная решетка для функций алгебры логики описана Э. Постом [1, 2], при больших значениях к описание данной решетки вызывает серьезные трудности.

В связи с этим предлагается подход, при котором рассматриваются более сильные операторы замыкания в отличие от суперпозиции, которые позволяют «сжать» эту решетку до конечного множества. В работах [3-7] исследуется оператор позитивного замыкания. Этот оператор рассматривался для таких классов дискретных функций как функции алгебры логики, функции трехзначной логики, частичные функции алгебры логики и гиперфункции ранга 2.

В настоящей статье данный оператор удалось определить на множестве мультифункций. Далее естественным образом возникают вопросы выразимости мультифункций, которые рассматриваются ниже. Автором найден критерий позитивной полноты произвольного множества мультифункций на двухэлементном множестве.

1. Основные понятия и определения

Пусть A={0, 1} и F={∅, {0}, {1}, {0,1}}.

Отображение из A^n в F называется мультифункцией на A (мультифункцией ранга 2), а отображение из A^n в A называется функцией алгебры логики.

Через K обозначим множество всех мультифункций, каждая из которых принимает на противоположных наборах либо разные булевы значения, либо одновременно значение ∅, либо одновременно значение {0, 1}.

Символами языка Pos являются переменные x_1, x_2,..., x_i, символы f_i для обозначения мультифункций, символ включения ⊆, логические связки конъюнкция & и дизъюнкция ∨, квантор существования ∃, левая и правая скобки, запятая.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22–21–20013, https://rscf.ru/project/22-21-20013/ и Правительства Республики Бурятия.

Введем понятие терма:

- любая переменная есть терм;
- если x_{i1} ,..., x_{in} – переменные (возможно различные), а f – символ n-местной мультифункции, то $f(x_{i1}$,..., $x_{in})$ есть терм;
- если t_1 ,..., t_n – термы, f – символ n-местной мультифункции, то $f(t_1$,..., $t_n)$ есть терм.

Всякий терм t языка Pos определяет некоторую мультифункцию h. Если $f_1,...,f_n$ – символы мультифункций, входящих в терм t, то будем говорить, что терм t выражает мультифункцию h через мультифункции $f_1,...,f_n$.

Понятие формулы определяется следующим образом:

если t_1, t_2 – термы языка Pos, то выражение $(t_1 \subseteq t_2)$ называется элементарной формулой;

если Φ_1, Φ_2 – формулы, а x_i – переменная, то (Ф1 & Ф2), (Ф1 $\vee$ Ф2), $(\exists x_i)\Phi_1$ – формулы языка Pos (позитивные формулы).

Любая формула языка Pos с n свободными переменными определяет n-местное отношение (предикат) на A.

Пусть P – произвольное множество мультифункций, [P] – замыкание P относительно суперпозиции, $f(x_1,...,x_n)$ – некоторая мультифункция, $\Phi(x_1,...,x_n, y)$ – формула языка Pos со свободными переменными $x_1,...,x_n, y$, все функциональные символы которой являются обозначениями мультифункций из [P], формула $\Phi(x_1,...,x_n, y)$ определяет отношение $p(x_1,...,x_n, y)$ на множестве A. Будем говорить, что формула $\Phi(x_1,...,x_n, y)$ позитивно выражает отношение $p(x_1,...,x_n, y)$ через мультифункции множества P.

Очевидно, что любая n-местная мультифункция $f(x_1,...,x_n)$ однозначно определяет (n+1)-местное отношение, позитивно выраженное формулой $y \subseteq f(x_1,...,x_n)$, и наоборот.

Будем говорить, что формула $\Phi(x_1,...,x_n, y)$ позитивно выражает мультифункцию $f(x_1,...,x_n)$ через мультифункции множества P, если формулы $\Phi(x_1,...,x_n, y)$ и $y \subseteq f(x_1,...,x_n)$ позитивно выражают одно и тоже отношение.

Множество всех мультифункций, позитивно выразимых через мультифункции множества P, назовем позитивным замыканием множества P и обозначим Pos[P]. Множество P, совпадающее со своим позитивным замыканием, называется позитивным замкнутым.

Множество B называется позитивно полным, если Pos[B] совпадает с множеством всех мультифункций.

2. Основная теорема

В этом разделе предлагается формулировка теоремы, дающая необходимое и достаточное условие позитивной полноты произвольного множества мультифункций ранга 2.

Теорема 1. Множество мультифункций B является позитивно полным тогда и только тогда, когда выполнено условие, что B не является подмножеством K.

Следствие. Множество K является единственным предполным классом.

Заключение

Таким образом, автор видит следующий шаг в рассмотрении на множестве мультифункций оператора параметрического замыкания, который несколько обобщает введенный выше.

Библиография

1. *Post E. L.* Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. - Vol. 43. – P. 163–185.
2. *Post E. L.* Two-valued iterative systems of mathematical logic. Princeton Univ. Press, Princeton, 1941.
3. *Марченков С.С.* Замкнутые классы булевых функций. – М.: Физматлит, 2000. – 126 с.
4. *Марченков С.С.* Критерий позитивной полноты в трехзначной логике // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2006. – Т. 13, № 3. – С. 27–39.
5. *Марченков С.С., Попова А.А.* Позитивно замкнутые классы частичных булевых функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2008. – № 3. – С. 30–34.
6. *Марченков С.С.* Позитивно замкнутые классы трёхзначной логики // Дискретный анализ и исследование операций. 2014. – Т. 21, № 1. – С. 67–83.

7. *Рябец Л.В.* Операторы параметрического и позитивного замыкания на множестве гиперфункций ранга 2 // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2016. – Т. 20, № 3. – С. 79–84.

Bibliography

1. *Post E. L.* Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. - Vol. 43. – P. 163–185.
2. *Post E. L.* Two-valued iterative systems of mathematical logic. Princeton Univ. Press, Princeton, 1941.
3. *Marchenkov S.S.* Zamknutye klassy bulevykh funktsiy [Closed Boolean function classes.] M.: Fizmatlit, 2000. – 126 p.
4. *Marchenkov S.S.* Criterion for positive completeness in three-valued logic // Journal of Applied and Industrial Mathematics. Ser. 1. 2006. – Vol. 13, No. 3. – P. 27–39.
5. *Marchenkov S.S., Popova A.A.* Positively closed classes of partial Boolean functions // Vestnik of Moscow university. Ser. 15. Computational math. and cybern. 2008. – No. 3. – P. 30–34.
6. *Marchenkov S.S.* Positive closed classes in the three-valued logic // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2014. – Vol. 8, No. 2. – P. 256–266.
7. *Riabets L.V.* Operators of parametric and positive closure on the set of hyperfunctions of rank 2 // Intelligent systems. Theory and applications. 2016. – Vol. 20, No. 3. – P. 79–84.

УДК 517.977.5; 519.83

DOI 10.53980/9785907599970_255

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЕМ СОСТОЯНИЯ ФАЗОВОГО ВЕКТОРА ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Шориков А.Ф.
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина,
Россия, Екатеринбург, afshorikov@mail.ru

В докладе рассматривается линейная дискретная управляемая динамическая система с целевой функцией, оценивающей гарантированный (минимаксный) результат прогнозирования допустимых состояний фазового вектора системы. Исследуется многошаговая задача оптимизации программного управления прогнозированием состояния фазового вектора системы в финальный период времени при выбранной целевой функции. Для ее решения предлагается методика, реализуемая в виде только одношаговых операций, допускающих их алгоритмизацию. Полученные результаты иллюстрируются на модельных примерах и могут быть использованы для разработки и создания систем автоматического управления динамическими объектами.

Ключевые слова: *дискретные динамические системы, прогнозирование состояния, минимаксное оценивание, оптимальное программное управление*.

OPTIMIZATION OF PROGRAM CONTROL FOR PREDICTING THE STATE OF THE PHASE VECTOR OF A LINEAR DISCRETE-TIME CONTROLLED DYNAMICAL SYSTEM

Shorikov A.F.
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of the RAS,
Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yltsin,
Russia, Ekaterinburg, afshorikov@mail.ru

The report considers a linear discrete-time controlled dynamical system with an objective function that estimates the guaranteed (minimax) result of predicting the admissible states of the phase vector of the system. A multi-step problem of optimizing the program control by predicting the state of the phase vector of the system in the final period of time with a chosen objective function is investigated. To solve it, a technique is proposed that is implemented in the form of only one-step operations that allow their algorithmization. The results obtained are illustrated by model examples and can be used to develop and create automatic control systems for dynamical objects.

Key words*: Discrete-time dynamical systems, state prediction, minimax estimation, optimal program control*.

Введение

В докладе рассматривается система, динамика которой на заданном целочисленном промежутке времени описывается линейным дискретным векторно-матричным рекуррентным уравнением при наличии фазового вектора, вектора управляющего воздействия (управления) и вектора возмущения (погрешности моделирования). Предполагается, что фазовый вектор системы и вектор возмущения в каждый период времени ограничены многогранниками-компактами, например, в виде многомерных параллелепипедов в соответствующих конечномерных векторных пространствах, а вектор управления в каждый период времени ограничен конечным набором его значений в соответствующем конечномерном векторном пространстве. В рамках рассматриваемой дискретной управляемой динамической системы формулируется задача минимизации программного управления минимаксным оцениванием [1-3] состояния фазового вектора системы в финальный период времени. Для исследуемой задачи, на основе результатов работы [3], предлагается методика ее решения, которая описывается в виде конечной рекуррентной последовательности только одношаговых операций, допускающих их алгоритмизацию.

1. Постановка задачи

Пусть на заданном целочисленном промежутке времени (далее просто — промежутке времени) $\overline{0,T} = \{0,1,\ldots,T\}$ ($T \in \mathbf{N}$; $\mathbf{N}$ – множество всех натуральных чисел) динамика системы описывается линейным дискретным рекуррентным векторно-матричным уравнением вида

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t)v(t),\ x(0) = x_0,\ t \in \overline{0,T-1}, \tag{1}$$

где $x(t) = \left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\right)'$ – фазовый вектор системы в период времени t, $x(t) \in \mathbf{R}^n$ (здесь и далее, для $k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{R}^k$ – k-мерное векторное пространство векторов-столбцов, даже если из экономии места они записаны в строку; x_0 – заданное начальное значение фазового вектора); $u(t) = \left(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_p(t)\right)'$ – вектор управляющего воздействия в период времени t или вектор управления системой, $u(t) \in \mathbf{R}^p$; $v(t) = \left(v_1(t), v_2(t), \ldots, v_q(t)\right)'$ – вектор возмущения (погрешности моделирования) в период времени t, $v(t) \in \mathbf{R}^q$; $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ – действительные матрицы размерностей $(n \times n)$, $(n \times p)$ и $(n \times q)$ соответственно.

Предполагается, что в рассматриваемой динамической системе, для каждого периода времени t ($t \in \overline{0,T}$) значения фазового вектора $x(t) = \left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\right)' \in \mathbf{R}^n$ должны удовлетворять следующему заданному геометрическому ограничению, например, в виде n-мерного параллелепипеда в пространстве $\mathbf{R}^n$, а именно, описываемого с помощью формулы

$$\mathbf{X}^*(t) = \left\{x(t):\ x(t) = \left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\right)' \in \mathbf{R}^n, \forall i \in \overline{1,n}: 0 \le x_i(t) \le x_i^*(t)\right\}, \tag{2}$$

где $\forall i \in \overline{1,n}: x_i^*(t) \in \mathbf{R}^1,\ x_i^*(t) > 0$. В рассматриваемом процессе управления для каждого периода времени t ($t \in \overline{0,T-1}$), значения вектора управления $u(t) = \left(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_p(t)\right)' \in \mathbf{R}^p$ должны удовлетворять следующему заданному ограничению

$$u(t) \in \mathbf{U}^*(t) = \left\{u^{(1)}(t), u^{(2)}(t), \ldots, u^{(K_t)}(t)\right\} \subset \mathbf{R}^p, \tag{3}$$

где $K_t \in \mathbf{N}$; каждое множество $\mathbf{U}^*(t) \ne \varnothing$ и есть конечное множество из K_t векторов в пространстве $\mathbf{R}^p$, определяющее ресурсы и возможные сценарии процесса управления. Предполагается также, что в рассматриваемом процессе управления, для каждого периода времени t ($t \in \overline{0,T-1}$) и допустимого управления $u(t) \in \mathbf{U}^*(t)$, значения вектора возмущения $v(t) = \left(v_1(t), v_2(t), \ldots, v_q(t)\right)' \in \mathbf{R}^q$ должны удовлетворять следующему заданному геометрическому ограничению, например, в виде q-мерного параллелепипеда в пространстве $\mathbf{R}^q$, а именно, описываемого с помощью формулы

$$\mathbf{V}^*(t; u(t)) = \left\{v(t):\ v(t) = \left(v_1(t), v_2(t), \ldots v_q(t)\right)' \in \mathbf{R}^q, \forall i \in \overline{1,q}: 0 \le v_i(t) \le v_i^*(t) \cdot \Delta_i(u(t))\right\}, \tag{4}$$

где $\forall i \in \overline{1,q}: v_i^*(t) \in \mathbf{R}^1,\ v_i^*(t) > 0$; $\Delta_i : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^1$ – заданная действительная функция с положительными значениями, т.е. $\Delta_i(u(t)) > 0$.

2. Формализация задачи

Введем ряд определений, необходимых для формализации исследуемой оптимизационной задачи. Здесь и далее, согласно [3], для $k \in \mathbf{N}$ и целочисленного промежутка времени $\overline{\tau,\vartheta} \subseteq \overline{0,T}$ ($\tau < \vartheta$), символом $\mathbf{S}_k\left(\overline{\tau,\vartheta}\right)$ будем обозначать метрическое пространство вектор-функций целочисленного аргумента $\varphi : \overline{\tau,\vartheta} \to \mathbf{R}^k$, а символом $\operatorname{comp}\mathbf{S}_k\left(\overline{\tau,\vartheta}\right)$ – множество всех непустых и компактных подмножеств пространства $\mathbf{S}_k\left(\overline{\tau,\vartheta}\right)$.

Назовем набор $w(\tau) = \{\tau, x(\tau)\} \in \overline{0,T} \times \mathbf{R}^n$ ($w(0) = \{0, x_0\} = w_0$) τ-позицией дискретной управляемой динамической системы (1) − (4), или просто – τ-позицией системы, и определим множество $\mathbf{W}(\tau) = \{\tau\} \times \mathbf{X}^*(t)$ ($\mathbf{W}(0) = \{0\} \times \mathbf{X}^*(0) = \mathbf{W}_0$) всех допустимых τ-позиций рассматриваемой системы.

Используя ограничение (3) и аналогично [3], определим конечное множество $\mathbf{U}(\overline{\tau,T})\subset\mathbf{S}_p(\overline{\tau,T-1})$ ($\tau<T$) допустимых на промежутке времени $\overline{\tau,T}\subseteq\overline{0,T}$ программных управлений $u_\tau(\cdot)$ системы, а на основании ограничения (4), для управления $u_\tau(\cdot)\in\mathbf{U}(\overline{\tau,T})$ определим множество $\mathbf{V}(\overline{\tau,T};u_\tau(\cdot))\in$ $\in\mathrm{comp}\mathbf{S}_q(\overline{\tau,T-1})$ всех допустимых возмущений $v_\tau(\cdot)$ на этом промежутке времени, соответствующих управлению $u_\tau(\cdot)$. Пусть $x(\cdot)=\psi_{\overline{\tau,T}}(\cdot;x_\tau,u_\tau(\cdot),v_\tau(\cdot))$ – допустимая на промежутке времени $\overline{\tau,T}$ фазовая траектория системы (1) – (4), соответствующая допустимому набору $\{w_\tau,u_\tau(\cdot),v_\tau(\cdot)\}\in\mathbf{W}(\tau)\times\mathbf{U}(\overline{\tau,T})\times\mathbf{V}(\overline{\tau,T};u_\tau(\cdot))$ ($w(\tau)=\{\tau,x_\tau\}=w_\tau$, $w(0)=\{0,x_0\}=w_0$), если $\forall t\in\overline{\tau,T}$: $x(t)=\psi_{\overline{\tau,T}}(t;x_\tau,u_\tau(\cdot),v_\tau(\cdot))\in\mathbf{X}^*(t)$, $x(\tau)=x_\tau$, где $\psi_{\overline{\tau,T}}:\mathbf{R}^n\times\mathbf{S}_p(\overline{\tau,T-1})\times\mathbf{S}_q(\overline{\tau,T-1})\to\mathbf{S}_n(\overline{\tau,T})$ – оператор правой части уравнения (1), действующий на промежутке времени $\overline{\tau,T}$. Обозначим символом $\mathbf{X}(\cdot;\overline{\tau,T},X,u_\tau(\cdot),\mathbf{V}(\overline{\tau,T};u_\tau(\cdot)))$ – трубку всех допустимых фазовых траекторий $x(\cdot)=$ $=\psi_{\overline{\tau,T}}(\cdot;x_\tau,u_\tau(\cdot),v_\tau(\cdot))$, $x_\tau\in X$, $v_\tau(\cdot)\in\mathbf{V}(\overline{\tau,T};u_\tau(\cdot))$, системы (1) – (4) [3], соответствующую набору $\{X,u_\tau,(\cdot)\}\in\mathbf{2}^{\mathbf{R}^n}\times\mathbf{U}(\overline{\tau,T})$, а через $\mathbf{X}(t;\overline{\tau,T},X,u_\tau(\cdot),\mathbf{V}(\overline{\tau,T};u_\tau(\cdot)))$ обозначим ее сечение в период времени $t\in\overline{\tau+1,T}$, которое назовем обобщенной областью достижимости [3] или прогнозным множеством дискретной управляемой динамической системы (1) − (4), и это множество является выпуклым многогранником-компактом пространства $\mathbf{R}^n$, если X − многогранник-компакт в $\mathbf{R}^n$.

Пусть $\mathbf{r}_T^{(e)}=\mathbf{r}(\mathbf{X}(T;\overline{\tau,T},\{x_\tau\},u_\tau(\cdot),\mathbf{V}(\overline{\tau,T};u_\tau(\cdot))))$ – значение величины чебышеского радиуса прогнозного множества $\mathbf{X}(T;\overline{\tau,T},\{x_\tau\},u_\tau(\cdot),\mathbf{V}(\overline{\tau,T};u_\tau(\cdot)))$, а $x_T^{(e)}\in\mathbf{X}(t;\overline{\tau,T},\{x_\tau\},u_\tau(\cdot),\mathbf{V}(\overline{\tau,T};u_\tau(\cdot)))$ – его чебышевский центр (см., например, [3]). Определим целевую функцию $\mathbf{\Phi}_{\overline{\tau,T}}:\mathbf{W}(\tau)\times\mathbf{U}(\overline{\tau,T})\to\mathbf{R}^1$, значения которой для каждого набора $\{w_\tau,u_\tau(\cdot)\}\in\mathbf{W}(\tau)\times\mathbf{U}(\overline{\tau,T})$ определяются по формуле

$$\mathbf{\Phi}_{\overline{\tau,T}}(w_\tau,u_\tau(\cdot))=\mathbf{r}(\mathbf{X}(T;\overline{\tau,T},\{x_\tau\},u_\tau(\cdot),\mathbf{V}(\overline{\tau,T};u_\tau(\cdot))))=\mathbf{r}_T^{(e)}. \qquad (5)$$

Тогда на основании сформированной модели (1) – (5) можно сформулировать следующую многошаговую задачу оптимизации программного управления минимаксным оцениванием.

Задача. Для заданных целочисленного промежутка времени $\overline{0,T}$, периода времени τ ($\tau\in\overline{0,T-1}$) и τ-позиции $w(\tau)=\{\tau,x(\tau)\}=\{\tau,x_\tau\}=w_\tau\in\mathbf{W}(\tau)$ ($w(0)=\{0,x(0)\}=\{0,x_0\}=w_0\in\mathbf{W}_0$) дискретной управляемой динамической системы (1) − (4), для любого периода времени $t\in\overline{\tau+1,T}$ и любого допустимого программного управления $u_\tau(\cdot)\in\mathbf{U}(\overline{\tau,T})$ требуется сформировать прогнозное множество $\mathbf{X}(t;\overline{\tau,T},\{x_\tau\},u_\tau(\cdot),\mathbf{V}(\overline{\tau,T};u_\tau(\cdot)))$ и найти конечное множество оптимальных программных управлений $\mathbf{U}^{(e)}(\overline{\tau,T})=\{u_\tau^{(e)}(\cdot)\}\subseteq\mathbf{U}(\overline{\tau,T})$, минимизирующих значения целевой функции $\mathbf{\Phi}_{\overline{\tau,T}}$ вида (5), путем реализации конечного числа одношаговых операций, допускающих их алгоритмизацию.

Заключение

В докладе исследуется многошаговая задача оптимизации программного управления минимаксным оцениванием состояния фазового вектора динамической системы (1) – (4) в финальный период времени. Для ее решения предлагается методика, реализуемая в виде только одношаговых операций, допускающих их алгоритмизацию. Полученные результаты иллюстрируются на модельных примерах и могут быть использованы для создания систем автоматического управления.

Библиография

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. – М.: Наука, 1974.

3. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1977.

4. *Шориков А.Ф.* Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997.

Bibliography

1. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Positional differential games. – M.: Nauka, 1974.

3. *Kurzhanskii A.B.* Control and observability in conditions of uncertainty. – M.: Nauka, 1977.

3. *Shorikov A.F.* Minimax estimation and control in discrete-time dynamical systems. – Ekaterinburg: Publishing House of Ural State University, 1997.

УДК 517.93; 519.83; 004.42

DOI 10.53980/9785907599970_259

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И МИНИМАКСНОГО ОЦЕНИВАНИЯ СОСТОЯНИЙ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ*

Шориков А. Ф.*, Тюлюкин В. А.**
**Институт экономики УрО РАН,*
Россия, Екатеринбург, afshorikov@mail.ru
***Уральский государственный экономический университет,*
Россия, Екатеринбург, tul@mail.ru

В докладе рассматриваются задачи минимаксного оценивания прогнозируемых состояний и оптимального терминального управления для различных классов линейных дискретных управляемых динамических систем при наличии фазовых ограничений и ограничений на управляющие воздействия (управления) в виде многогранников-компактов, описываемых своими вершинами или множествами решений совместных систем линейных алгебраических равенств и неравенств в соответствующих конечномерных векторных пространствах. Приведено описание структуры и функциональных возможностей созданного авторами программного комплекса, реализующего компьютерное моделирование решения рассматриваемых задач минимаксного оценивания и оптимального терминального управления при различных целевых функциях.

Ключевые слова: *дискретные динамические системы, прогнозирование состояний, минимаксное оценивание, оптимальное управление, компьютерный программный комплекс.*

COMPUTER SIMULATION OF THE SOLUTION OF PROBLEMS OF OPTIMAL CONTROL AND MINIMAX ESTIMATION OF STATES OF DISCRETE-TIME DYNAMICAL SYSTEMS

Shorikov A.F.*, Tyulyukin V.A.**
**Institute of Economics of the Ural Branch of the RAS,*
Russia, Ekaterinburg, afshorikov@mail.ru
***Ural State University of Economics,*
Russia, Ekaterinburg, tul@mail.ru

The report considers the problems of minimax estimation of predicted states and optimal terminal control for various classes of linear discrete-time controlled dynamical systems in the presence of phase constraints and constraints on control actions (controls) in the form of compact polyhedrons described by their vertices or by sets of solutions joint systems of linear algebraic equalities and inequalities in the corresponding finite-dimensional vector spaces. The description of the structure and functionality of the software package created by the authors, which implements computer simulation of the solution of the considered problems of minimax estimation and optimal terminal control for various objective functions, is given.

Key words*: Discrete-time dynamical systems, state prediction, minimax estimation, optimal control, computer software package.*

Введение

В докладе рассматривается созданный авторами программный комплекс, предназначенный для компьютерного моделирования решения задач минимаксного прогнозирования и оптимального управления состояниями дискретных управляемых динамических систем. Приведено описание структуры программного комплекса и функции его основных модулей, которые позволяют реализовать моделирование решения рассматриваемых задач в рамках детерминированного минимаксного подхода [1-3]. Динамика рассматриваемого управляемого объекта описывается линейной дискретной управляемой динамической системой общего вида. Ограничения на фазовый

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-28-01868 "Разработка агент-ориентированной модели сетевого промышленного комплекса в условиях цифровой трансформации").

вектор системы и вектор управляющего воздействия имеют вид многогранников-компактов в соответствующих конечномерных векторных пространствах, которые задаются своими вершинами или множествами решений совместных систем линейных алгебраических равенств и неравенств. В программном комплексе используются результаты и алгоритмы, представленные в монографии [3]. Комплекс может быть использован для разработки и создания систем автоматического управления.

1. Описание динамической системы

Пусть на заданном целочисленном промежутке времени (далее просто – промежутке времени) $\overline{0,T} = \{0,1,\ldots,T\}$ ($T \in \mathbf{N}$; $\mathbf{N}$ – множество всех натуральных чисел) динамика системы описывается линейным дискретным рекуррентным векторно-матричным уравнением вида

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t),\ x(0) = x_0,\ t \in \overline{0,T-1}, \tag{1}$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))'$ – фазовый вектор системы в период времени t, $x(t) \in \mathbf{R}^n$ (здесь и далее, для $k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{R}^k$ – k-мерное векторное пространство векторов-столбцов, даже если из экономии места они записаны в строку; x_0 – заданное начальное значение фазового вектора), значения которого должны удовлетворять следующему заданному геометрическому ограничению

$$\forall t \in \overline{0,T}:\ x(t) \in \mathbf{X}^*(t) \subset \mathbf{R}^n, \tag{2}$$

где $\mathbf{X}^*(t)$ – многогранник-компакт в пространстве $\mathbf{R}^n$; $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_p(t))'$ – вектор управляющего воздействия в период времени t или вектор управления системой, $u(t) \in \mathbf{R}^p$, значения которого должны удовлетворять следующему заданному геометрическому ограничению

$$\forall t \in \overline{0,T-1}:\ v(t) \in \mathbf{U}^*(t) \subset \mathbf{R}^p, \tag{3}$$

где $\mathbf{U}^*(t)$ – многогранник-компакт в пространстве $\mathbf{R}^p$; $A(t)$ и $B(t)$ – действительные матрицы размерностей $(n \times n)$ и $(n \times p)$ соответственно, и для всех $t \in \overline{0,T-1}$ матрица $A(t)$ является невырожденной.

Многогранники-компакты $\mathbf{X}^*(t)$, $t \in \overline{0,T}$, и $\mathbf{U}^*(t)$, $t \in \overline{0,T-1}$, описываются своими вершинами или множествами решений совместных систем линейных алгебраических равенств и неравенств (СЛАРН).

Согласно [3], для $k \in \mathbf{N}$ и целочисленного промежутка времени $\overline{\tau,\vartheta} \subseteq \overline{0,T}$ ($\tau < \vartheta$), символом $\mathbf{S}_k(\overline{\tau,\vartheta})$ будем обозначать метрическое пространство вектор-функций целочисленного аргумента $\psi : \overline{\tau,\vartheta} \to \mathbf{R}^k$, а символом $\operatorname{comp}\mathbf{S}_k(\overline{\tau,\vartheta})$ – множество всех непустых и компактных подмножеств пространства $\mathbf{S}_k(\overline{\tau,\vartheta})$.

Назовем набор $w(\tau) = \{\tau, x(\tau)\} \in \overline{0,T} \times \mathbf{R}^n$ ($w(0) = \{0, x_0\} = w_0$) τ-позицией дискретной управляемой динамической системы (1) − (3), или просто – τ-позицией системы, и определим множество $\mathbf{W}(\tau) = \{\tau\} \times \mathbf{X}^*(t)$ ($\mathbf{W}(0) = \{0\} \times \mathbf{X}^*(0) = \mathbf{W}_0$) всех допустимых τ-позиций рассматриваемой системы.

Используя ограничение (3) и аналогично [3], определим множество $\mathbf{U}(\overline{\tau,T}) \in \operatorname{comp}\mathbf{S}_p(\overline{\tau,T-1})$ допустимых на промежутке времени $\overline{\tau,T} \subseteq \overline{0,T}$ ($\tau < T$) программных управлений $u_\tau(\cdot) = \{u_\tau(t)\}_{t \in \overline{0,T-1}}$ системы. Пусть $x(\cdot) = \varphi_{\overline{\tau,T}}(\cdot; x_\tau, u_\tau(\cdot))$ – допустимая на промежутке времени $\overline{\tau,T}$ фазовая траектория системы (1) – (3), соответствующая допустимому набору $\{w_\tau, u_\tau(\cdot)\} \in \mathbf{W}(\tau) \times \mathbf{U}(\overline{\tau,T})$ ($w(\tau) = \{\tau, x_\tau\} = w_\tau$, $w(0) = \{0, x_0\} = w_0$), если $\forall t \in \overline{\tau,T}:\ x(t) = \varphi_{\overline{\tau,T}}(t; x_\tau, u_\tau(\cdot)) \in \mathbf{X}^*(t)$, $x(\tau) = x_\tau$, где $\varphi_{\overline{\tau,T}} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{S}_p(\overline{\tau,T-1}) \to \mathbf{S}_n(\overline{\tau,T})$ – оператор правой части уравнения (1), действующий на промежутке времени $\overline{\tau,T}$. Тогда рассматривается терминальная целевая функция $\mathbf{\Phi}_{\overline{\tau,T}} : \mathbf{W}(\tau) \times \mathbf{U}(\overline{\tau,T}) \to \mathbf{R}^1$, значения которой для каждого набора $\{w_\tau, u_\tau(\cdot)\} \in \mathbf{W}(\tau) \times \mathbf{U}(\overline{\tau,T})$ определяются по формуле

$$\mathbf{\Phi}_{\overline{\tau,T}}(w_\tau, u_\tau(\cdot)) = \gamma(\varphi_{\overline{\tau,T}}(T; x_\tau, u_\tau(\cdot))) = \gamma(x(T)), \tag{4}$$

где $\gamma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$ – заданный линейный, выпуклый или недифференцируемый терминальный функционал; $x(T) = \varphi_{\overline{\tau,T}}\left(T; x_\tau, u_\tau(\cdot)\right)$.

2. Описание структуры программного комплекса

В рамках сформированной математической модели (1) – (4) в работе [3] представлены формализации и решения нижеследующих задач.

Задача 1. *Задача построения области достижимости (прогнозного множества)* – нелинейная многошаговая задача формирования прогнозного множества всех допустимых фазовых состояний дискретной управляемой динамической системы (1) − (3) в заданный период времени.

Задача 2. *Задача формирования минимаксных оценок прогнозного множества* – нелинейная задача оптимизации гарантированного результата.

Задача 3. *Краевая задача* – нелинейная многошаговая задача.

Задача 4. *Задача оптимального программного терминального управления* – нелинейная многошаговая оптимизационная задача.

Задача 5. *Задача оптимального адаптивного терминального управления* – нелинейная многошаговая оптимизационная задача.

Математическая формализация и численные алгоритмы решения различных типов задач 1–5, формируемых в рамках дискретной управляемой динамической системы (1) − (4), основываются на результатах, представленных в работе [3]. Для компьютерного моделирования решений этих задач, авторами доклада разработан и создан в среде Delphi 7 моделирующий интеллектуальный компьютерный программный комплекс (ИКПК) «Прогнозирование и оптимизация управления – PredOptCont-2023» (разработчики – Шориков А.Ф. – модели и алгоритмы, Тюлюкин В.А. – программный код).

ИКПК содержит следующие основные модули: Модуль А (Интерфейс); Модуль 1 (Прогнозирование); Модуль 2 (Минимаксные оценки); Модуль 3 (Краевая задача); Модуль 4 (Задача оптимального программного управления); Модуль 5 (Задача оптимального адаптивного управления).

Данный программный комплекс позволяет реализовать формирование решений задач прогнозирования, минимаксного оценивания фазовых состояний и оптимизации управления рассматриваемой дискретной управляемой динамической системой (1) – (3) для различных типов целевых функций вида (4). Для решения конкретной задачи пользователю предлагается произвести ввод исходных данных, определяющих все параметры системы (1) – (4): элементов матриц A и B; параметров, описывающих ограничения (2), (3) на допустимые значения соответственно фазового вектора и вектора управляющих воздействий системы в виде вершин многогранников-компактов и или в виде множеств решений СЛАРН; описание целевой функции вида (4); количество периодов времени для реализации решения конкретной задачи; форму отображения результатов.

Заключение

В работе представлено описание используемой в ИКПК «Прогнозирование и оптимизация управления – PredOptCont-2023» дискретной управляемой динамической системы для формализации задач построения и минимаксного оценивания прогнозного множества, оптимального программного и адаптивного управления при наличии линейных, выпуклых и недифференцируемых терминальных целевых функций, описание и функции его основных модулей и пользовательского интерфейса. Программный комплекс может использоваться для разработки систем автоматического управления.

Библиография

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. – М.: Наука, 1974.

2. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1977.

3. *Шориков А.Ф.* Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997.

Bibliography

1. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Positional differential games. – M.: Nauka, 1974.

2. *Kurzhanskii A.B.* Control and observability in conditions of uncertainty. – M.: Nauka, 1977.

3. *Shorikov A.F.* Minimax estimation and control in discrete-time dynamical systems. – Ekaterinburg: Publishing House of Ural State University, 1997.

DOI 10.53980/9785907599970_262

STUDY ON TRAVELING WAVE SOLUTIONS OF SINGULARLY PERTURBED NONLINEAR WAVE EQUATIONS: DYNAMICAL SYSTEM APPROACH

Jundong Wang[1,2], Lijun Zhang[2*], Elena Shchepakina[3], Vladimir Sobolev[3]

[1] *Qingdao University of Science and Technology, Gaomi, Shandong, 261500, China*
jd_w@qq.com

[2] *College of Mathematics and Systems Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong, 266590, China*
li-jun0608@163.com

[3] *Samara National Research University, Moskovskoye Shosse 34, Samara, 443086, Russia*
shchepakina@yahoo.com
hsablem@gmail.com

The existence of traveling wave solutions for singularly perturbed nonlinear wave equations is investigated in this paper. Dynamical system approach is applied to explore solitary wave solutions for the unperturbed model equations firstly. By using geometric singular perturbation theory, the perturbed traveling wave system is usually reduced to a regularly perturbed planar system, which is confined to a slow invariant manifold. Then the existence of solitary wave solutions is discussed via Melnikov's method. If there is a double homoclinic loop passing through a hyperbolic saddle in the unperturbed traveling wave system, a new type of solitary wave solutions possessing crest and trough is detected.

Key words*: Dynamical system approach, geometric singular perturbation theory, Melnikov's method, solitary wave solution.*

Introduction

Nonlinear wave equations, such as the classical KdV equation, Gardner equation, BBM equation and so on, are well studied by researchers due to their significant applications in nonlinear science, especially in the field of shallow water wave. These model equations may have an important type of solutions, traveling wave solutions, which can describe many nonlinear phenomena in real world.

However, there always exist some ineluctable perturbations or relative small effect to these ideal equations in reality. Studying the existence of traveling wave solutions for perturbed nonlinear wave equations is clearly more practical. In the current paper, we focus on the existence of solitary wave solutions for several singularly perturbed nonlinear wave equations. The main method used here is the bifurcation theory of planar dynamical system.

Results of research and their discussion

To examine the existence of solitary wave solutions for a singularly perturbed nonlinear wave equation, we often use the derivation process as follows. The singularly perturbed nonlinear wave equation, which is often a partial differential equation (PDE), is transformed into an ordinary differential equation (ODE) under traveling wave framework. The ODE is rewritten as a singularly perturbed high dimensional system, i.e., the so-called slow system. Then it is reduced to a near-Hamiltonian system confined to a slow invariant manifold via geometric singular perturbation theory [1]. If the corresponding unperturbed system has a homoclinic orbit, we use Melnikov's method [2-3] to examine the distance between the stable and unstable manifold of the hyperbolic saddle of the near-Hamiltonian system. If the distance is zero, then there exists a homoclinic orbit for the near-Hamiltonian system, thus the existence of solitary wave solution for the singularly perturbed nonlinear wave equation is obtained according to dynamical system approach.

If there is a double homoclinic loop passing through a hyperbolic saddle in the unperturbed traveling wave system, it may become a large concave homoclinic orbit under small perturbation [3]. Clearly, the large concave homoclinic loop corresponds to a new type of solitary wave solution possessing both crest and trough. Its wave speed selected principle is derived from the simple zero of Melnikov function and implicit function theorem.

We give the following examples as explanations.

1. mK(3,1) equation with Kuramoto-Sivashinsky (K-S) perturbation [4]:

$$(u^2)_t + (u^3)_x + u_{xxx} + \varepsilon(u_{xx} + u_{xxxx}) = 0, \tag{1}$$

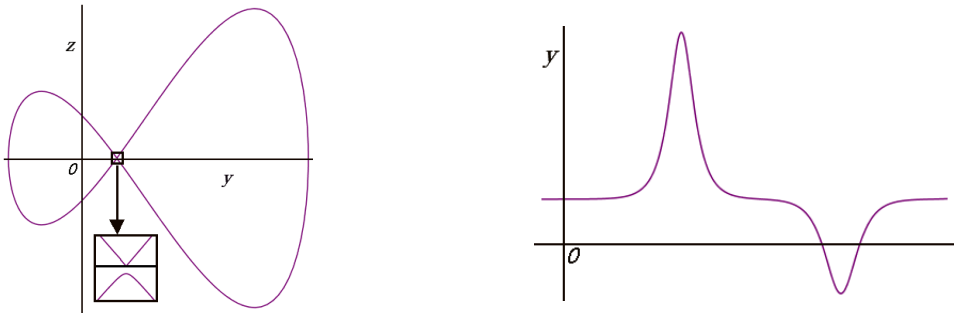
[*] Corresponding author. The work was supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 12172199, 12011530062

where u denotes the height of fluid at spatial varible x and time t, and $0<\varepsilon\ll 1$ is the perturbed parameter. Note that Chen [5] established the existence of solitary wave solutions and periodic wave solutions for Eq. (1). However, integration constant is omitted therein when integrating the traveling wave equation, which may lead to distinct dynamical behavior. Zhu [6] obtained the existence of solitary wave solutions when the integration constant takes the other two values. Here, we add the constant to further improve conclusions.

By introducing traveling wave transformation $u(x,t)=\varphi(\xi)=u(x-ct)$ and scale transformation $\tau=c\xi, y=\frac{\varphi}{c}$, and using Fenichel's theorem [1], Eq. (1) is converted into a near-Hamiltonian system on a slow invariant manifold.

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{d\tau}=z\\ \dfrac{dz}{d\tau}=y^2-y^3-(y_0^2-y_0^3)+\varepsilon cz(3y^2-2y-\dfrac{1}{c^2})\end{cases} \tag{2}$$

Here $0<y_0<\frac{1}{3}$ and c is the wave speed. By Melnikov's method, it is shown that when ε is sufficiently small and the wave speed c is selected appropriately, system (2) has two families of homoclinic orbits, which correspond to two families of solitary wave solutions of Eq. (1) that possess single crest and single trough, respectively. Moreover, it is proved that system (2) has a large concave homoclinic orbit, which corresponds to a new type of solitary wave solutions of Eq. (1) possessing both crest and trough. See Figure 1.(a) and (b).



(a) A large concave homoclinic orbit (b) New solitary wave profile with crest and trough

Figure 1. Diagram of a large concave homoclinic loop of system (2) and the corresponding solitary wave with coexisting crest and trough of equation (1)

2.Singularly perturbed generalized KdV equation with high order nonlinearity [7-8]:

$$(u^n)_t+(u^m)_x+u_{xxx}+\varepsilon(u_{xx}+u_{xxxx})=0 \tag{3}$$

Numerous literatures discussed persistence of traveling wave equations for Eq. (2) when the integers n and m take special values. Here we deals with the general case of n and m. By introducing traveling wave transformation $u(x-ct)=\varphi(\xi)$ and scale transformation $\tau=c^{\frac{m-1}{2(m-n)}}\xi, y=c^{\frac{1}{n-m}}\varphi$, Eq. (3) is converted to a near-Hamiltonian system

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{d\tau}=z\\ \dfrac{dz}{d\tau}=y^n-y^m+g+\varepsilon c^{\frac{m-1}{2(m-n)}}z(my^{m-1}-ny^{n-1}-c^{-\frac{m-1}{m-n}})\end{cases} \tag{4}$$

The unperturbed system, namely, system (4) with $\varepsilon=0$ is analysed by qualitative theorem of dynamical system. We listed 8 different phase portraits according to the parity of n and m, and in each case, take the constant g as birfurcation value. Then all the possible homoclinic orbits for the unperturbed system are obtained. As for the perturbed system (4), we utilize the same method as in [4] to obtain the existence of solitary wave solutions for Eq. (3). See Theorem 3.1 in [7] for detail. The results enrich the contents of [9] ($n=1, g=0$).

3.A generalized BBM equation with distributed delay and dissipative perturbation [10]:

$$u_t + ((f * u)u^{n-1})_x - u_{xxt} + \tau u_{xxxx} = 0, \tag{5}$$

where τ is the time delay, $f(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$ is called the weak generic delay kernel, and the convolution $f * u$ is defined by $f * u(x, y, t) = \int_{-\infty}^{t} f(t-s)u(x, y, s)ds$. After introducing traveling wave transformation and integrating once, Eq.(5) is converted to a four-dimensional dynamical system, which can be further reduced to a planar near-Hamiltonian system on a two-dimensional invariant manifold

$$\begin{cases} \frac{dy}{d\tau} = z \\ \frac{dz}{d\tau} = y^n - y^m + g + \varepsilon c^{\frac{m-1}{2(m-n)}} z(my^{m-1} - ny^{n-1} - c^{-\frac{m-1}{m-n}}) \end{cases} \tag{6}$$

It is proved that system (6) has one homoclinic orbit when n is even and $g > -n^{\frac{1}{1-n}}(1-\frac{1}{n})$, and one double homoclinic loop when n is odd and $|g| < n^{\frac{1}{1-n}}(1-\frac{1}{n})$, which leads to the existence of one solitary wave solution with crest, and two solitary wave solutions with single crest and trough for Eq.(5), respectively. Moreover, we observed that Eq.(5) with $n = 3$ has the new type of solitary waves possessing crest and trough simultaneously under certain conditions as well, and the wave speed selected principle is given.

Conclusion

Dynamical system approach is a powerful tool to explore the existence of homoclinic loops and limit cycles for perturbed planar systems. In this paper, three typical nonlinear wave equations with singular perturbations or distributed delay are presented to illustrate this method. We mainly focus on the existence of solitary wave solutions, especially the new type of solitary wave solutions for model equations. We believe our result refreshes and enriches the knowledge on traveling wave solutions to nonlinear wave equations.

Bibliography

1. *Fenichel N*. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations// J. Differ. Equ. 1979. –No. 8. – P. 53–98.

2. *Perko L*. Differential Equations and Dynamical Systems, 3rd edition. New York : Springer-Verlag, 2000.

3. *Han M*. Bifurcation theory of limit cycles. Beijing : Science press, 2013.

4. *Zhang L., Wang J., Shchepakina E., Sobolev V.* New type of solitary wave solution with coexisting crest and trough for a perturbed wave equation// Nonlinear Dynam. 2021. –No. 106. – P.3479–3493.

5. *Chen A., Guo L., Deng X*. Existence of solitary waves and periodic waves for a perturbed generalized BBM equation// J. Differ. Equ. 2016. –No.261. – P.5324-5349.

6. *Zhu K., Wu Y., Shen J., et al.* New solitary wave solutions in a perturbed generalized BBM equation// Nonlinear Dynam. 2019. –No.97. – P. 2413-2423.

7. *Wang J., Zhang L., Shchepakina E., Sobolev V.* Solitary waves of singularly perturbed generalized KdV equation with high order nonlinearity// Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S, 2022 – No. 3&4. – P. 639–654.

8. *Wang J., Yuen M., Zhang L.* Persistence of solitary wave solutions to a singularly perturbed generalized mKdV equation// Appl. Math. Lett. 2022. –No.124. – P.107668.

9. *Yan W., Liu Z., Liang Y.* Existence of solitary waves and periodic waves to perturbed generalized KdV equation// Math. Model. Anal. 2014.–No. 19. – P. 537-555.

10 *Wang J., Zhang L., Li J.* New solitary wave solutions of a generalized BBM equation with distributed delays// Nonlinear Dynam. 2023. –No. 111. – P. 4631–4643.

DOI 10.53980/9785907599970_265

TRAVELLING WAVE SOLUTIONS OF THE FIFTH-ORDER STRAIN WAVE EQUATION IN MICROSTRUCTURED SOLIDS

Lephoko M.Y.T., Khalique C.M.*
Material Science, Innovation and Modelling Research Focus Area,
Department of Mathematical Sciences, North-West University, Mafikeng Campus,
Mmabatho, South Africa
dasmice@gmail.com Masood.Khalique@nwu.ac.za

In this paper, we examine the fifth-order strain wave equation, which has applications in various fields of science and engineering. We employ the Lie group theory of differential equations along with the generalized tanh-function method to obtain travelling wave solutions.

Key Words: *Fifth-order strain wave equation, Lie point symmetry, travelling wave solutions, generalized tanh-function method.*

Introduction

he study of physical and engineering problems through mathematical modeling involves dealing with nonlinear partial differential equations (NPDEs), which are essential for understanding the structure of these problems. The investigation of exact solutions for these equations is of great importance, as it provides insight into the mechanisms of the phenomena being studied.

The strain wave equation (SWE) is a NPDE given by [1]

$$u_{tt} - u_{xx} - \epsilon\beta_1(u^2)_{xx} - \omega\beta_2 u_{txx} + \alpha\beta_3 u_{xxxx} - (\alpha\beta_4 - \omega^2\beta_7)u_{ttxx} + \omega\alpha(\beta_5 u_{txxxx} + \beta_6 u_{tttxx}) = 0, \quad (1)$$

where $u(t,x)$ is the micro-strain wave function, ϵ is the coefficient corresponding to elastic strains, α represents the ratio between the wave length and micro-structure size, ω is the coefficient of dissipation and $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7$ are nonzero constants.

Travelling wave solutions of SWE

In this section we employ Lie symmetry analysis [2,3] on the equation (1) together with the generalized tanh-function method and obtain travelling wave solutions of (1). Applying the symmetry method one obtains the two translation symmetries, namely

$$\mathcal{S}_1 = \partial_t, \ \mathcal{S}_2 = \partial_x.$$

To obtain the travelling wave solutions we use the infinitesimal generator $\mathcal{S} = \partial_t + c\,\partial_x$ we get $u = F(z), \ z = x - ct$, where c is an arbitrary constant. Substituting this into (1) we obtain the reduced nonlinear ordinary differential equation (NODE)

$$\alpha\omega(\beta_6 c^3 + \beta_5 c)F^{(5)} + c^2(\alpha\beta_4 - \beta_7\omega^2)F^{(4)} - c^2F'' - \beta_2 c\omega F^{(3)} - \alpha\beta_3 F^{(4)} + \beta_1\epsilon(2FF'' - 2F'^2) - F'' = 0. \quad (2)$$

We now use the generalized tanh-function method to obtain multiple solutions of (1) by solving the fifth-order NODE (2). Let the solution of (2) be given in the form

$$F(z) = \sum_{i=0}^{m} A_i\, y^i(z),$$

where $A_i (i = 0,1,2,\dots,m)$ are constants, m is a positive integer obtained by balancing the nonlinear term (s) and the highest derivative term in (2), and $y(z)$ is a solution of the Riccati equation

$$y'(z) = k + y^2(z), \quad (3)$$

where k is a constant. We note that equation (3) admits several types of solutions [4]:

$$y = \begin{cases} -\sqrt{-k}\tanh\left(\sqrt{-k}z\right) \\ -\sqrt{-k}\coth\left(\sqrt{-k}z\right) \end{cases} \text{for } k < 0, \ y = -\frac{1}{z} \ \text{ for } k = 0, \ y = \begin{cases} \sqrt{k}\tan\left(\sqrt{k}z\right) \\ -\sqrt{k}\cot\left(\sqrt{k}z\right) \end{cases} \text{for } k > 0.$$

For equation (2), balancing the terms $F^{(5)}$ and FF'', we obtain the following ansatz:

$$F(z) = A_0 + A_1 y(z) + A_2 y^2(z) + A_3 y^3(z). \quad (4)$$

Now substituting (4) into (2) and using (3), and thereafter setting all coefficients of $y^i (i = 0,1,2,3)$ to zero, gives eight algebraic equations for A_0, A_1, A_2 and A_3. Solving these eight equations we obtain

$$A_0 = 0,\ A_1 = -\frac{30(38\alpha\beta_5 ck\omega - \beta_2 c\omega + 38\alpha\beta_6 ck\omega)}{19\beta_1\epsilon},\ A_2 = 0,$$

$$A_3 = \frac{38(\alpha A_1\beta_5 + \alpha A_1\beta_6)}{-\beta_2 + 38\alpha\beta_5 k + 38\alpha\beta_6 k},\ \alpha = \frac{\beta_7\omega^2}{\beta_4 - \beta_3},\ k = \frac{11\beta_2}{76\alpha(\beta_5 + \beta_6)},\ c = 1.$$

Thus, we obtain the following four solutions of (1):

$$u_1 = -A_1\sqrt{-k}\tanh\left(\sqrt{-k}z\right) - A_3\left(\sqrt{-k}\tanh\left(\sqrt{-k}z\right)\right)^3, \quad \text{for } k < 0,$$

$$u_2 = -A_1\sqrt{-k}\coth\left(\sqrt{-k}z\right) - A_3\left(\sqrt{-k}\coth\left(\sqrt{-k}z\right)\right)^3, \quad \text{for } k < 0,$$

$$u_3 = A_1\sqrt{k}\tan\left(\sqrt{k}z\right) - A_3\left(\sqrt{k}\tan\left(\sqrt{k}z\right)\right)^3, \quad \text{for } k > 0,$$

$$u_4 = -A_1\sqrt{k}\cot\left(\sqrt{k}z\right) - A_3\left(\sqrt{k}\cot\left(\sqrt{k}z\right)\right)^3, \quad \text{for } k > 0.$$

Conclusion

In this report we studied the fifth-order strain wave equation, which has implications in different fields of nonlinear science and engineering. We applied the Lie symmetry method along with the generalized tanh-function method to the equation and constructed some travelling wave solutions.

Bibliography

1. *Baskonus, H.M., Sulaiman, T.A., Bulut, H.*, 2018. Novel complex and hyperbolic forms to the strain wave equation in microstructured solids. Optical and Quantum Electronics, 50. – P.1–9.
2. *Ovsiannikov. L.V.*, 1982. Group analysis of differential equations, New York, Academic Press.
3. *Ibragimov, N.H.*, 1999. Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations, (Vol. 197), Wiley, New York.
4. *Fan, E., Hona, Y.C.*, 2002. Generalized tanh method extended to special types of nonlinear equations. Zeitschrift für Naturforschung A, 57(8). – P.692–700.

DOI 10.53980/9785907599970_267

ON MINIMIZATION WITH COUPLED CONSTRAINTS AND QUASI VARIATIONAL INEQUALITIES

Nevena Mijajlovi´c[1], Milojica Ja´cimovi´c[2]
[1]University of Montenegro, Department of Mathematics, Pod gorica, Montenegro , nevenamijajlovic@hotmail.com, www.pmf.ac.me [2] Montenegrin Academy of Sciences and Arts, Podgorica, Mon tenegro, milojica@jacimovic.me, http://www.canu.ac.me

Usually, problems of minimization have to been solved on some fixed set. The necessary condition of the optimality in this case can be written as a variational inequality. But, one often has to solve a minimization problem when the set of constraints is changeable. Then, necessary optimality condition can be expressed as a vari ational inequality with coupled constraints, (variational inequality on changeable set), i.e. as a quasi-variational inequality.

Some classical algorithms of minimization and standard method of solving variational inequalities, are not applicable in these cases, because minimization problem and variational inequality with cou pled constraints requires that these problems have to be solved con currently with the fixed point problem of the set-valued mapping. We will present and analyse some algorithms which are adapted for solving minimization problem and variational inequalities with coupled constraints.

DOI 10.53980/9785907599970_268

EXISTENCE SOLITARY WAVE SOLUTIONS AND PERIODIC WAVE SOLUTIONS FOR PERTURBED MODIFIED GARDNER EQUATION

Yao Qi, Yu Tian*, Yuheng Jiang

School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications,
Beijing 100876, P.R. China

Abstract: *In this paper, the existence results of solitary and periodic wave solutions for the modified Gardner equation with Kuramoto-Sivashinsky perturbation are considered. Based on the relationship between solitary (periodic) wave solution and homoclinic (periodic) orbit of the corresponding ordinary differential equation, the existence of solitary and periodic wave solutions without perturbations is proved by bifurcation theory. Furthermore, it is proved that solitary and periodic wave solutions still exist when the perturbation parameters are sufficiently small by the geometric singular perturbation theory and invariant manifold theory. Finally, the accuracy of the theoretical analysis is verified using numerical simulations.*

Keywords: *Geometric Singular Perturbation Theory; Bifurcation theory; Modified* Gardner equation; Traveling waves solution.

Corresponding author:tianyu2992@163.com

МАТЕМАТИКА,
ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ
(МПМО23)

Материалы VIII Международной конференции

Компьютерная верстка *С.А. Баирова*

Подписано в печать 26.06.2023 г. Формат 60×84 1/8.
Объем 9,69 Мб. Усл. печ л. 31,27. Электронное издание. Заказ №81.

Издательство ВСГУТУ
670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В, строение 1.

ISBN 978-5-907599-97-0